Grafritning – kurvor och ytor

1 Inledning

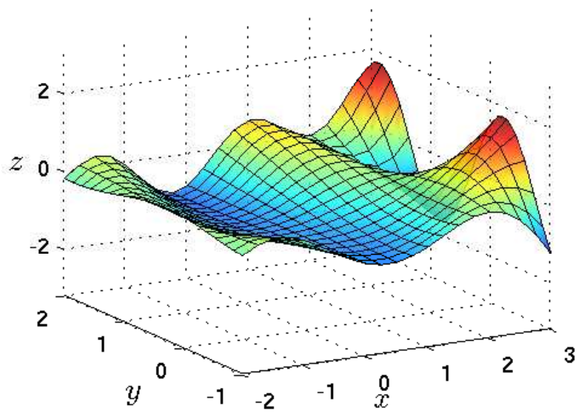
En graf till en funktion i en variabel $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är mängden $\{(x,y) : y=f(x)\}$, dvs. en kurva i planet. En graf till en funktion i två variabler $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är mängden $\{(x,y,z) : z=f(x,y)\}$, dvs. en yta i rummet, en s.k. *funktionsyta*.

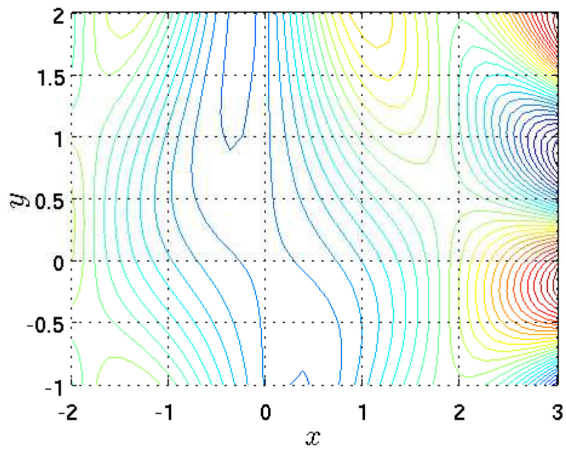
Som exempel tar vi

$$f(x,y)=(\frac{1}{3}x^2-1)\sin(1-xy)$$

över området $-2\le x\le 3$, $-1\le y\le 2$.

Vi ser funktionsytan nedan till vänster.





Ett annat sätt att åskådliggöra en funktion i två variabler $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är att rita *nivåkurvor*, dvs. mängderna $\{(x,y) : f(x,y)=c\}$, där c är en konstant som anger nivån. Vi ser nivåkurvor till vår funktion ovan till höger.

Vi får en slags topografisk karta av funktionen om vi ser funktionsytan som ett landskap och då blir nivån helt enkelt höjden över havet.

En funktion i tre variabler $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ kan vi inte rita en graf till. Det skulle vara en tredimensionellt objekt i ett fyrdimensionellt rum. Motsvarigheten till nivåkurvor blir *nivåytor*, dvs. mängderna $\{(x,y,z) : f(x,y,z)=c\}$ där c konstant. Dessa kan vi däremot rita upp.

Låt oss som exempel ta funktionen $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ i tre variabler. Nivåytorna blir då sfärer $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=c\}$ med centrum i origo.

Vi skall också se på vektorvärda funktioner, dels parametrisering av kurvor i planet $\boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ och i rummet $\boldsymbol{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, dels parametrisering av ytor $\boldsymbol{r}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ i rummet.

2 Kurvor i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

Vi har redan ritat kurvor i $\mathbb{R}^2$ med kommandot `plot`, när vi skall rita kurvor i $\mathbb{R}^3$ kommer vi använda kommandot `plot3`.

Exempelvis enhetscirkeln parametriserad av $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ där

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ritar vi upp med

```
>> subplot(1,3,1)
>> t=linspace(0,2*pi);
>> plot(cos(t),sin(t))
```

Spiralen given av parametriseringen $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ där

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$$

får vi med (nu använder vi `plot3`)

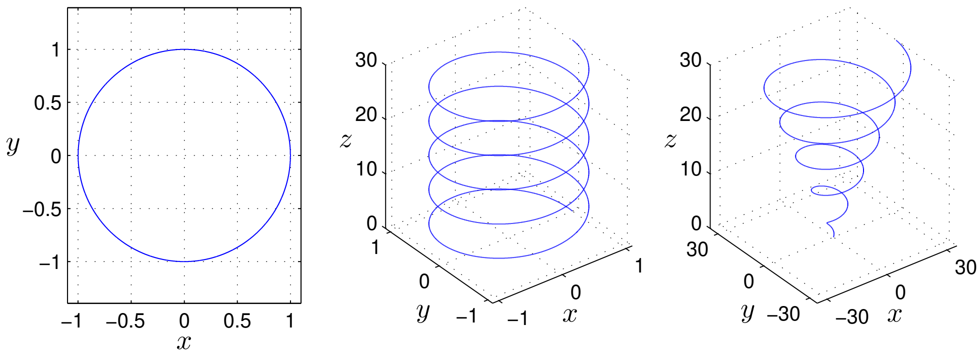
```
>> subplot(1,3,2)
>> t=linspace(0,10*pi);
>> plot3(cos(t),sin(t),t)
```

och den koniska spiralen given av

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t\cos(t), t\sin(t), t), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$$

ritar vi med (lägg märke till elementvis multiplikation)

```
>> subplot(1,3,3)
>> plot3(t.*cos(t),t.*sin(t),t)
```



Uppgift 1. Rita upp följande kurvor i $\mathbb{R}^2$

(a). Asteroiden $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b). Cykloiden $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$

Kurvan beskriver den väg en myra, som fastnat på ett hjul, färdas när hjulet rullar framåt. Snyggast ser kurvan ut om man ger kommandot `axis equal`.

Uppgift 2. Rita upp följande kurvor i $\mathbb{R}^3$ med `plot3`

(a). $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(10t), \sin(30t), t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b). $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3(10t), \sin^3(10t), t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

3 Funktionsytor i $\mathbb{R}^3$

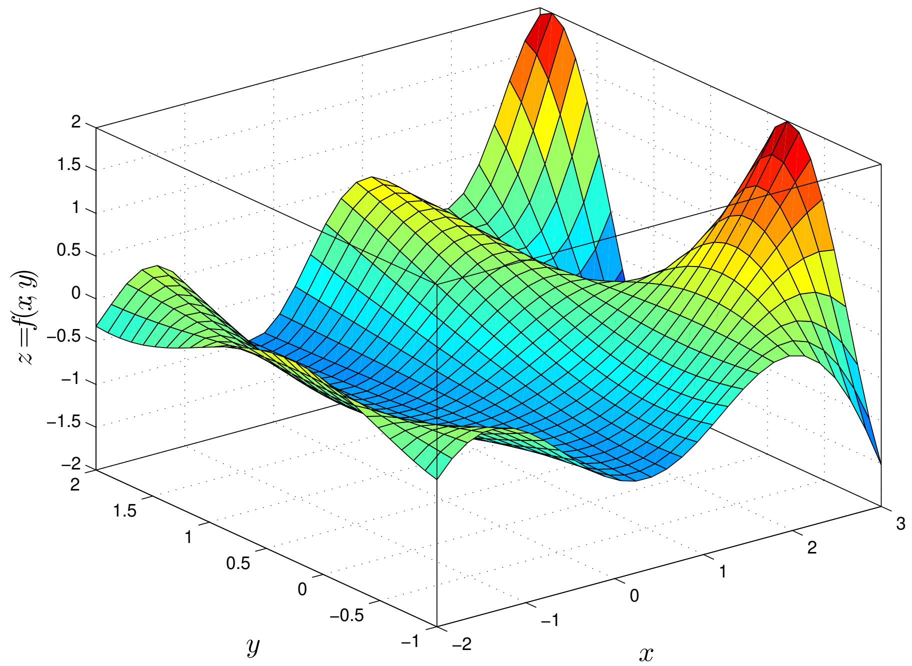
Vi ser på funktionsytan till funktionen från inledningen, dvs. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ där

$$f(x, y) = (\frac{1}{3}x^2 - 1)\sin(1 - xy)$$

över området $-2 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 2$.

Resultatet får vi med kommandot `surf`, vilket är motsvarigheten till `plot` då vi skall rita ytor.

```
>> f=@(x,y)(1/3*x.^2-1).*sin(1-x.*y);
>> x=linspace(-2,3,30); y=linspace(-1,2,30);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
>> surf(X,Y,Z)     % eller surf(x,y,Z)
>> grid on, box on
>> xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z = f(x,y)')
```



Funktionen `meshgrid` får som indata två vektorer `x` och `y`, med x- och y-värden, och ger två matriser `X` och `Y` som utdata.

Dessa matriser är uppbyggda så att vi kan göra en matris `Z` med alla $f(x, y)$-värden på en gång genom att skriva av vår matematiska formel för $f(x, y)$ bara vi använder elementvisa operationer och samtidigt ersätter x med `X` och y med `Y`.

Ritar vi en graf av en funktion i en variabel tar vi kanske några hundratal x-värden. När vi ritar en funktionsyta tar vi istället några tiotal x- respektive y-värden.

Ibland när man ritar en funktionsyta med `surf(X,Y,Z)` kanske man vill ha den lite genomskinlig och det kan man få med `surf(X,Y,Z,'FaceAlpha',0.7)`. Parametern `FaceAlpha` ges ett värde mellan 0 och 1, där 0 är helt transparent och 1 är helt solid.

Vill vi ha en enfärgad ytan, t.ex. blå, och ytan skall vara nästan helt genomskinlig så ger vi kommandot `surf(X,Y,Z,'FaceColor','b','FaceAlpha',0.1)`. Detta kan vara bra att använda när vi skall rita tangentplan i nästa laboration.

Uppgift 3. Rita funktionsytan till funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ där

$$f(x, y) = -xye^{-2(x^2+y^2)}$$

över området $-2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2$.

Hur fungerar det?

Den yta vi skall rita består av alla punkter $(x, y, f(x, y))$, där $x_{\min} \le x \le x_{\max}$ och $y_{\min} \le y \le y_{\max}$. Då vi skall rita ytan med `surf` krävs att vi bildar en $m \times n$-matris `Z` med elementen

$$z_{ij} = f(x_j, y_i)$$

där $x_{\min} = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x_{\max}$ och $y_{\min} = y_1 < y_2 < \cdots < y_m = y_{\max}$.

Lägg märke till ordningen på indexen, element z_{ij} skall innehålla funktionsvärdet för $x = x_j$ och $y = y_i$. Stigande x-värden längs rader i `Z`, dvs. stigande kolonn-index, och stigande y-värden längs kolonner i `Z`, dvs. stigande rad-index.

Vi går igenom några alternativa lösningar och vi tänker oss att vi i Matlab redan skapat en funktion `f` och koordinat-vektorer `x` och `y` med `n` respektive `n` element.

Alternativ 1. Vi bildar matrisen `Z` i Matlab med

```
Z=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        Z(i,j)=f(x(j),y(i));
    end
end
```

Alternativ 2. I första alternativet fick hålla reda på var det skulle vara `i` respektive `j`. Med funktionen `meshgrid` skapas två matriser `X` och `Y` så att `X(i,j)` har värdet `x(j)` och `Y(i,j)` har värdet `y(i)`, dvs. indexproblemet är borta.

```
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        Z(i,j)=f(X(i,j),Y(i,j));
    end
end
```

Alternativ 3. Den allra smidigaste lösningen får vi då vi låter de nästlade repetitionssatserna i tidigare alternativ ersättas av elementvisa operationer. Dvs. vår funktion `f` måste använda elementvisa operationer. Vi slipper även initieringen av `Z`.

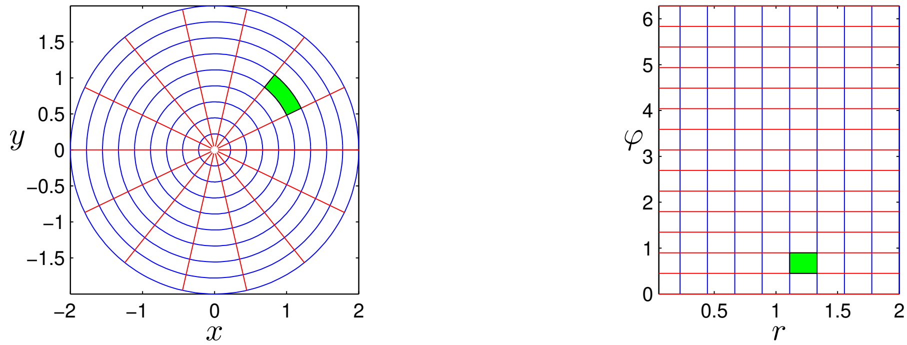
```
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);
```

Polära koordinater

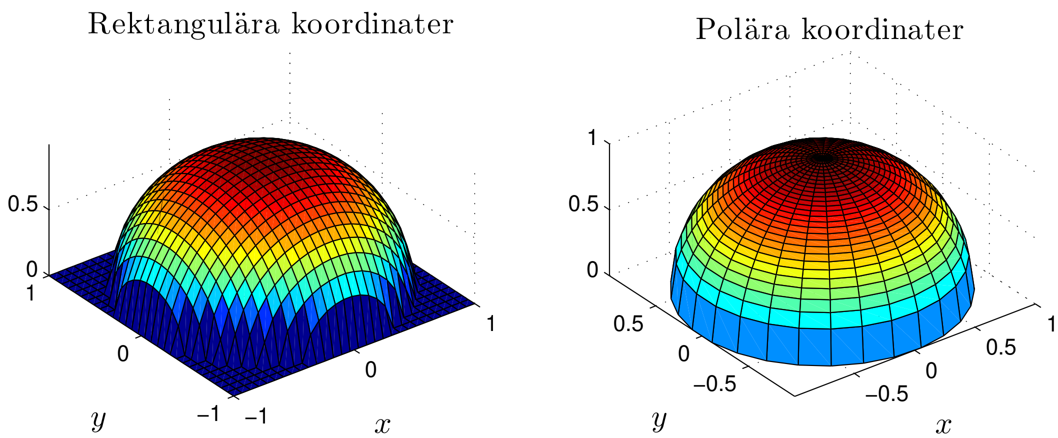
Ibland behöver man byta variabler för att på ett lättare eller bättre sätt behandla ett problem. Ett exempel på variabel- eller koordinatbyte är *polära koordinater*

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

där $(x, y) \neq (0, 0)$ samt $r > 0$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$.



Vill vi t.ex. rita grafen av $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ över området $x^2 + y^2 \leq 1$, dvs. en halvsfär, och använder rektangulära koordinater får vi den inte alltför snygga figuren nedan till vänster men använder vi polära koordinater får vi den lite snyggare till höger.




```
>> subplot(1,2,1)              % Rektangulära koordinater
>> x=linspace(-1,1,30); y=linspace(-1,1,30);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> U=1-X.^2-Y.^2;
>> U(find(U<0))=0;             % Sätter negativa värden till noll,
>> Z=sqrt(U);                  % så att vi kan ta roten ur utan problem
>> surf(X,Y,Z)

>> subplot(1,2,2)              % Polära koordinater
>> r=linspace(0,1,30); t=linspace(0,2*pi,30);
>> [R,T]=meshgrid(r,t);
>> X=R.*cos(T); Y=R.*sin(T);
>> Z=sqrt(1-R.^2);             % Vi utnyttjar att X.^2+Y.^2=R.^2
>> surf(X,Y,Z)
```

Uppgift 4. Rita upp de ytor som är grafer till nedanstående funktioner med `surf`:

(a). $f(x, y) = x + 2y - 2, \quad (x, y) \in [1, 2] \times [3, 4]$

(b). $f(x, y) = x^2 - y^2, \quad (x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$

(c). $f(x, y) = (1 - y^2)^{1/2}, \quad (x, y) \in [0, 3] \times [-1, 1]$

(d). $f(x, y) = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad (x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$ (Använd polära koordinater)

(e). $f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (Använd polära koordinater)

Uppgift 5. Rita grafen för funktionen

$$f(x, y) = -6x/(2 + x^2 + y^2)$$

över ett lämpligt område. Tänk på att använda elementvisa operationer.

4 Nivåkurvor i $\mathbb{R}^2$

Som exempel ser vi på funktionen vars nivåkurvor vi visade en bild av i inledningen

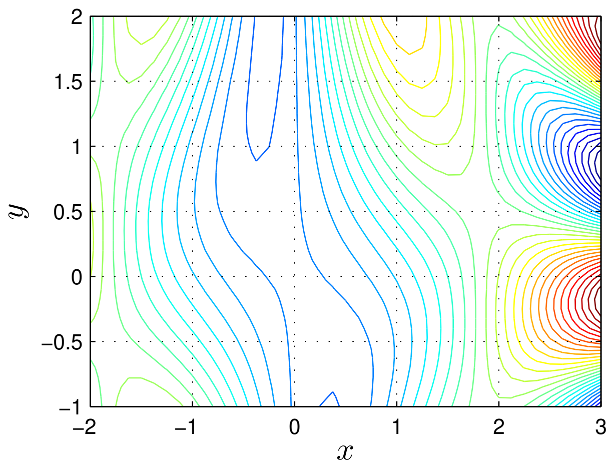
$$f(x, y) = (\frac{1}{3}x^2 - 1)\sin(1 - xy)$$

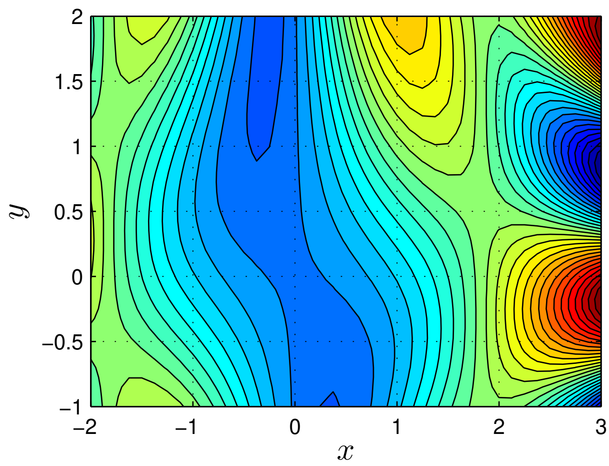
över området $-2 \leq x \leq 3, \ -1 \leq y \leq 2$.

Vi får bilden nedan med

```
>> x=linspace(-2,3,40); y=linspace(-1,2,40);
>> f=@(x,y)(1/3*x.^2-1).*sin(1-x.*y);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
>> contour(X,Y,Z,30)     % eller contour(x,y,Z,30)
```

Den lite fylligare bilden nedan till höger fås med `contourf`.





När man ritar nivåkurvor med `contour(X,Y,Z)` får man som standard 20 nivåer jämnt fördelade i spannet av värdena i `Z`, vill vi ha ett annat antal använder vi `contour(X,Y,Z,nl)`, där `nl` är antalet önskade nivåer. Om vi istället vill ange exakt vilka nivåer som skall ritas upp ger vi dem i en vektor `lvec` och använder `contour(X,Y,Z,lvec)`.

I laboration 3 vill vi rita upp endast nivån där funktionen är noll, dvs. rita noll-nivåkurvor. Detta gör vi med `contour(X,Y,Z,[0 0])`. Fundera på varför vi måste ge `0` två gånger.

Uppgift 6. Rita nivåkurvor till funktionerna i uppgift 4. Gå in och redigera cellerna så att ni samtidigt ser både funktionsytan och nivåkurvorna. Använd `subplot`.

Uppgift 7. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^2 - 15y$$

Rita ytan över ett lämpligt område samt skapa en konturplot. Rita några enstaka nivåkurvor.

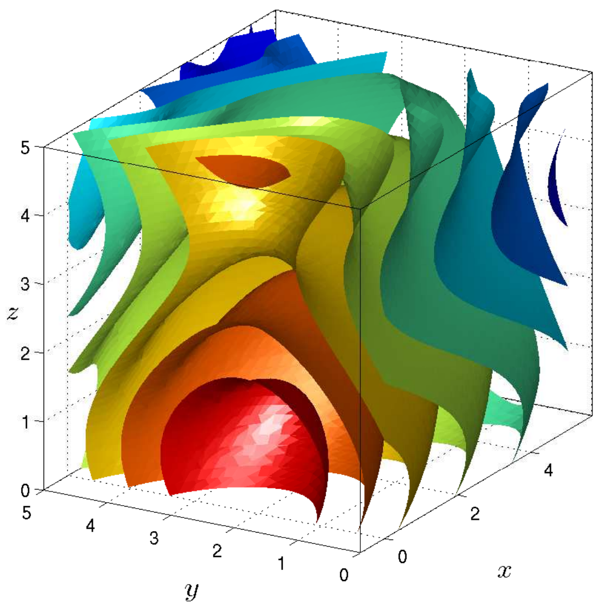
5 Nivåytor i $\mathbb{R}^3$

(*Frivilligt.*) För att rita nivåytor använder vi `isosurface`. Som exempel tar vi funktionen

$$f(x,y,z) = \sin(z + \cos(0.3xy)) - 0.5x + 2\sin(0.7y)$$

i tre variabler. Nivåytorna $\{(x,y,z) : f(x,y,z) = c\}$, för några värden på c, ritar vi upp enligt

```
>> x=linspace(0,5,40); y=linspace(0,5,40); z=linspace(0,5,40);
>> [X,Y,Z]=meshgrid(x,y,z);
>> F=sin(Z+cos(0.3*X.*Y))-0.5*X+2*sin(0.7*Y);
>> for c=linspace(-4,3,10)
       isosurface(X,Y,Z,F,c), hold on
>> end
>> camlight head
>> axis equal, grid on, box on
```



Vi kan bara ge ett c-värde i taget till `isosurface`, därav `for`-satsen. Man kan även pröva `slice` som man kan läsa om i hjälptexterna.

6 Allmänna ytor i $\mathbb{R}^3$

(*Frivilligt.*) Som exempel på en allmän yta i rummet tar vi en cylinder med radien ρ och höjden h som beskrivs av ekvationen

$$\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 = \rho^2,\ 0 \leq z \leq h\}$$

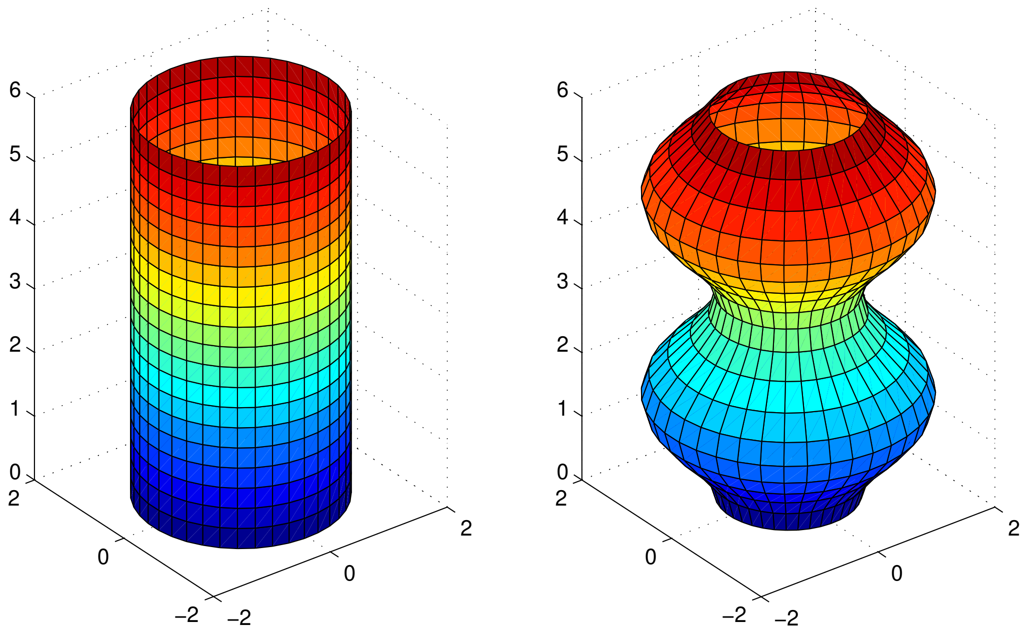
Ytan kan parametriseras $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ med

$$\boldsymbol{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = (\rho\cos(t), \rho\sin(t), s)$$

där $0 \leq s \leq h$ och $0 \leq t \leq 2\pi$.

Detta passar bra när vi skall rita bilden i MATLAB.

```
>> rho=1.5; h=6; n=20; m=30;
>> s=linspace(0,h,n); t=linspace(0,2*pi,m);
>> [S,T]=meshgrid(s,t);
>> X=rho*cos(T); Y=rho*sin(T); Z=S;
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal, axis([-2 2 -2 2 0 6])
```



För cylindern hade vi $\rho(s) = \rho_0$, dvs. ett konstant värde (samma radie). Om vi istället låter $\rho(s) = 1+\sin(s)^2$ (varierande radie) så blir det lite roligare. Detta är ett exempel på en *rotationsyta*. Sådana har vi sett på tidigare i kurserna.

Nu ritar vi upp rotationsytan. Var skiljer sig koden nedan från den för cylindern?

```
>> h=6; n=20; m=30;
>> s=linspace(0,h,n); t=linspace(0,2*pi,m);
>> [S,T]=meshgrid(s,t);
>> R=1+sin(S).^2;
>> X=R.*cos(T); Y=R.*sin(T); Z=S;
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal, axis([-2 2 -2 2 0 6])
```

En sfär med radien r och centrum i origo ges av ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

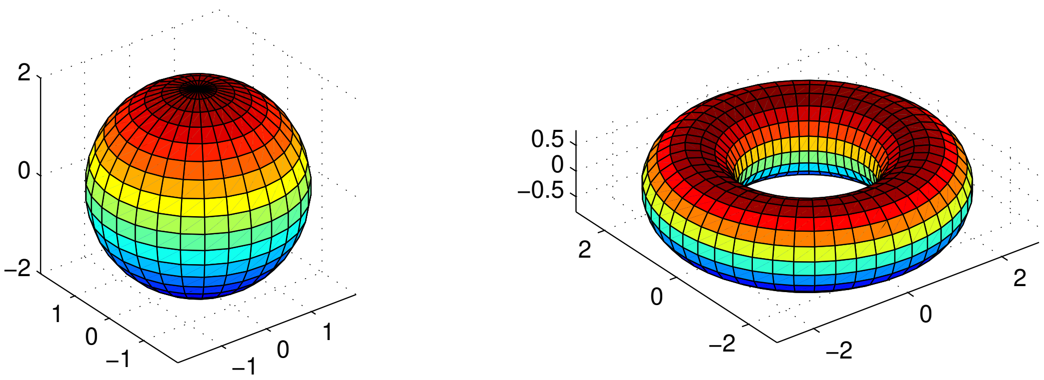
och kan parametriseras $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ med

$$\boldsymbol{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = (\rho \sin(s)\cos(t), \rho\sin(s)\sin(t), \rho\cos(s))$$

där $0 \le s \le \pi$ och $0 \le t \le 2\pi$.

Vi ritar en sfär med radien $\rho = 2$ enligt

```
>> rho=2; n=20; m=30;
>> s=linspace(0,pi,n); t=linspace(0,2*pi,m);
>> [S,T]=meshgrid(s,t);
>> X=rho*sin(S).*cos(T); Y=rho*sin(S).*sin(T); Z=rho*cos(S);
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal
```



En torus med lateralradien ρ och centralradien a samt centrum i origo ges av

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - \rho^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

och kan parametriseras $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ med

$$\boldsymbol{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) =$$

$$= ((a + \rho\cos(s))\cos(t), (a + \rho\cos(s))\sin(t), \rho\sin(s))$$

där $-\pi \le s \le \pi$ och $0 \le t \le 2\pi$.

Vi ritar en torus med lateralradien $\rho = 0.8$ och centralradien $a = 2$ enligt

```
>> rho=0.8; a=2; n=20; m=50;
>> s=linspace(-pi,pi,n); t=linspace(0,2*pi,m);
>> [S,T]=meshgrid(s,t);
>> X=(a+rho*cos(S)).*cos(T); Y=(a+rho*cos(S)).*sin(T); Z=rho*sin(S);
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal
```