Svartkroppsstrålning

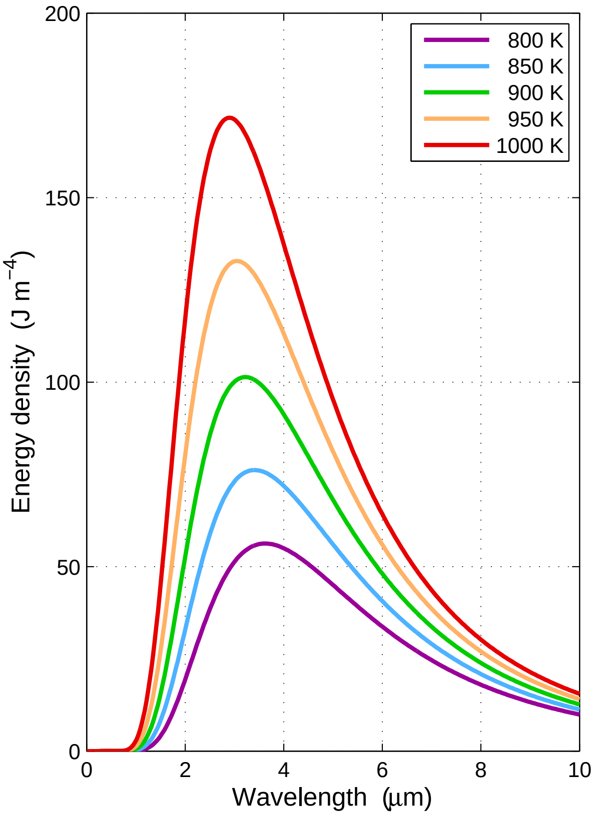
Analys och Linjär Algebra, del A, K1/Kf1/Bt1

Energitätheten vid svartkroppsstrålning vid temperaturen T (K) ges av Plancks strålningslag

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T} - 1}$$

där λ (μm) är våglängden, $h = 6.6256 \cdot 10^{-34}$ Js är Plancks konstant, $c = 2.9979 \cdot 10^8$ ms^{-1} är ljushastigheten i tomrum och $k = 1.3805 \cdot 10^{-23}$ JK^{-1} är Boltzmanns konstant.

Vi ritar grafen av $u(\lambda, T)$ över intervallet $0 < \lambda \leq \mu$m för några olika värden på T. Se Figure 1.12, Atkins och Jones kapitel 1, sid 8. Vår bild har samma skalor och temperaturval som i boken.



Huvuddelen av strålningen förskjuts mot allt kortare våglängder då temperaturen ökar. Enligt Wiens förskjutningslag (Atkins och Jones sid 9) gäller sambandet

$$T\lambda_{\max} = b_\lambda$$

där $\lambda_{\max}$ är den våglängd för vilken strålningen är maximal och $b_\lambda = 2.8979 \cdot 10^{-3}$ är Wiens förskjutningskonstant.

Man kan härleda Wiens förskjutningslag från Plancks strålningslag genom att deriverar $u(\lambda, T)$ med avseende på λ och sätta derivatan till noll.

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1}\right) =$$

$$= -5\frac{8\pi hc}{\lambda^6}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1} + \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{-1}{(\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1)^2}\,\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}\left(-\frac{hc}{k\lambda^2 T}\right) =$$

$$= \frac{8\pi hc}{\lambda^6(\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1)}\left(\frac{hc}{k\lambda T}\frac{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1} - 5\right)$$

så vi har

$$\frac{du}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{hc}{k\lambda T}\frac{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}}{\mathrm{e}^{hc/k\lambda T}-1} - 5 = 0$$

Låter vi $x = \frac{hc}{k\lambda T}$ kommer vi efter förenkling fram till ekvationen

$$f(x) = (x-5)\,\mathrm{e}^x + 5 = 0$$

Denna ekvation löser vi med Newtons metod eller `fzero` och får lösningen $x^* = 4.9651$ och därmed $b_\lambda = \frac{hc}{x^* k} = 2.8979 \cdot 10^{-3}$.

Enligt Stefan-Boltzmanns lag gäller sambandet $E = \sigma T^4$ mellan totala energimängden E och temperaturen T, där $\sigma = 5.6704 \cdot 10^{-8}\mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-4}$ är Stefan-Boltzmanns konstant.

Stefan-Boltzmanns lag kan fås från Plancks lag genom integration, men vi väntar med detta tills läsperiod 2 då vi lär oss den matematik som behövs.

Här följer den inte allt för vackra MATLAB-koden som gav figuren på förra sidan.

```
h=6.6256e-34; c=2.9979e8; k=1.3805e-23;
f=@(lambda,T)(8*pi*h*c)./(lambda.^5.*(exp((h*c)./(k*lambda*T))-1));

figure(1), clf
subplot('Position',[0.1 0.1 0.4 0.8])

lvec=linspace(0.01e-6,10e-6,300);
plot(lvec*1e6,f(lvec,800), 'Color',[0.6 0 0.6],'LineWidth',2)
hold on
plot(lvec*1e6,f(lvec,850), 'Color',[0.3 0.7 1],'LineWidth',2)
plot(lvec*1e6,f(lvec,900), 'Color',[0 0.8 0],  'LineWidth',2)
plot(lvec*1e6,f(lvec,950), 'Color',[1 0.7 0.4],'LineWidth',2)
plot(lvec*1e6,f(lvec,1000),'Color',[0.9 0 0],  'LineWidth',2)
hold off

grid on
axis([0 10 0 200])
set(gca,'XTick',0:2:10,'YTick',0:50:200)
xlabel('Wavelength  (\mum)','FontSize',12)
ylabel('Energy density  (J m^{-4})','FontSize',12)
legend('  800 K','  850 K','  900 K','  950 K','1000 K')
```