Svartkroppsstrålning – fortsättning

Analys och Linjär Algebra, del B, K1/Kf1/Bt1

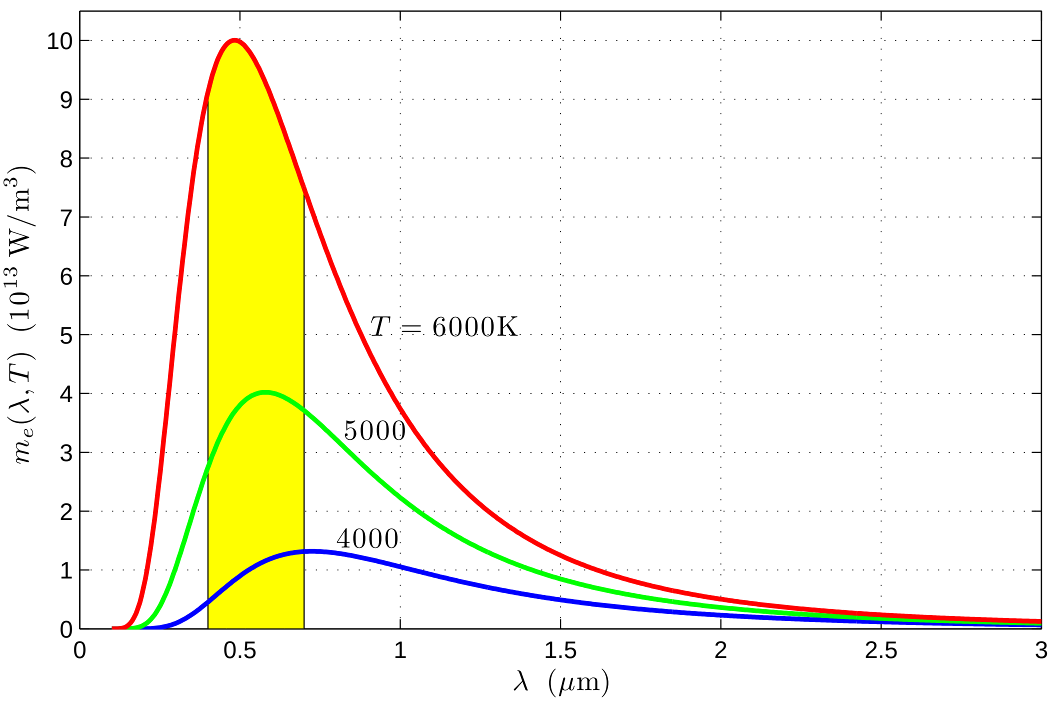
I läsperiod 1 tittade vi lite på Plancks strålningslag, Wiens förskjutningslag och Stefan-Boltzmanns lag (Atkins och Jones kapitel 1, sid 8 och 9). Då härledde vi Wiens förskjutningslag från Plancks strålningslag. Nu skall vi härleda Stefan-Boltzmanns lag från Plancks strålningslag genom en variabelsubstitution i en integral.

Följande version av Plancks strålningslag ger den monokromatiska emittansen för våglängden λ (μm) vid temperaturen T (K)

$$m_e(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{(e^{hc/k\lambda T} - 1)}$$

där $h = 6.6256 \cdot 10^{-34}$ Js är Plancks konstant, $c = 2.9979 \cdot 10^8$ ms^{-1} är ljushastigheten i tomrum och $k = 1.3805 \cdot 10^{-23}$ JK^{-1} är Boltzmanns konstant.

Figuren nedan visar den spektrala energifördelningen hos strålningen från en hålrumsstrålare, för några olika temperaturer.



Det skuggade området markerar den synliga delen av spektrat, $0.4 \leq \lambda \leq 0.7\mu$m.

Enligt Stefan-Boltzmanns lag gäller sambandet $E = \sigma T^4$ mellan totala energin E och temperaturen T, där $\sigma = 5.6704 \cdot 10^{-8}$Wm^{-2}K^{-4} är Stefan-Boltzmanns konstant.

Stefan-Boltzmanns lag kan fås från Plancks lag genom integration, det gäller att

$$E(T) = \int_0^\infty m_e(\lambda, T)\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/k\lambda T} - 1)}\, d\lambda = -2\pi\, \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_\infty^0 \frac{s^3}{e^s - 1}\, ds$$

där vi gjorde variabelsubstitutionen $\frac{hc}{k\lambda T} = s$ med $-\frac{hc}{k\lambda^2 T}\, d\lambda = ds$.

Integralen $\int_0^\infty \frac{s^3}{e^s - 1}\, ds = \frac{\pi^4}{15}$ är känd så vi får slutligen

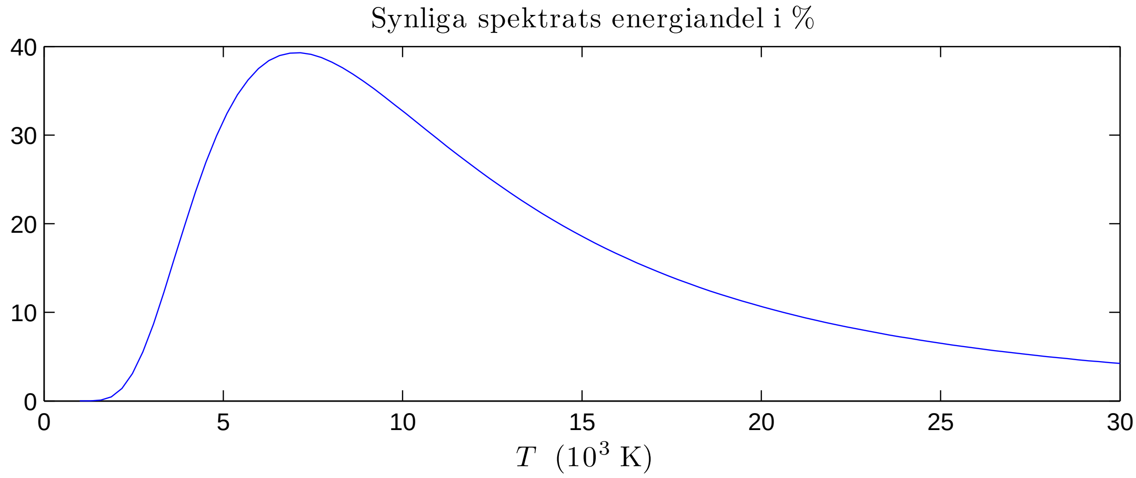
$$E(T) = \frac{2}{15}\, \pi^5 \frac{k^4}{h^3 c^2}\, T^4 = \sigma T^4$$

Vid bestämning av den totala energin i det synliga spektrat, för fixt T, sträcker sig integrationen över intervallet $0.4 \leq \lambda \leq 0.7\, \mu$m. Denna integral går däremot inte att räkna ut exakt utan vi måste använda en numerisk metod.

I figuren nedan ser vi kvoten mellan totala energin i det synliga spektrat och den totala energin, som funktion av T. Dvs. vi ser grafen av

$$q(T) = \frac{\int_{0.4\cdot 10^{-6}}^{0.7\cdot 10^{-6}} m_e(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4}$$

där $10^3 \leq T \leq 30 \cdot 10^3$ K.



Här följer MATLAB-koden som gav figuren.

```
h=6.6256e-34; c=2.9979e8; k=1.3805e-23; sigma=5.6704e-8;
me=@(lambda,T,h,c,k)(2*pi*h*c^2)./(lambda.^5.*(exp((h*c)./(k*lambda*T))-1));

Tvec=linspace(1e3,30e3,100); qvec=zeros(size(Tvec));
for n=1:length(Tvec)
    qvec(n)=quad(@(lambda)me(lambda,Tvec(n),h,c,k),0.4e-6,0.7e-6);
end
qvec=qvec./(sigma*Tvec.^4);

plot(Tvec/1e3,qvec*100)
xlabel('T (10^3 K)'), title('Synliga spektrats energiandel i %')
```