Dubbelintegralen

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1

1 Inledning

Vi skall börja med att approximera dubbelintegralen av en funktion över ett enkelt rektangulärt område

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy.$$

Sedan skall vi se hur vi kan klara av allmännare områden.

Enkelintegraler approximerade vi redan i ALA-B och vi skall för dubbelintegraler använda samma typ av approximationer. Då beskrev vi vänster och höger rektangelregel, mittpunktsregeln och trapetsregeln. Samtliga dessa metoder för enkelintegralen kan generaliseras till multipelintegraler, men vi kommer nöja oss med att titta på dubbelintegraler.

2 Rektangelregeln

I en studio-övning i ALA-B betraktade vi enkelintegralen över ett intervall

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

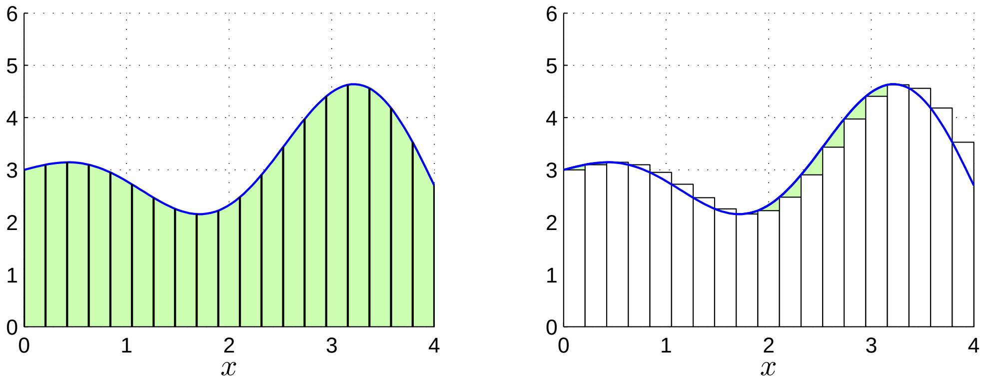
Vi gjorde en likformig indelning av intervallet $a \le x \le b$ enligt

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

så att vi fick n lika långa delintervall $x_{i-1} \le x \le x_i$ med samma bredd $h = \frac{b-a}{n}$.

Vi approximerade $f(x)$ med $f(x_{i-1})$ i intervallen $x_{i-1} \le x \le x_i$ och fick *vänster rektangelregel*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\, f(x_{i-1})$$



Nu skall vi upprepa samma resonemang för dubbelintegralen

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$

Förutom indelning av intervallet $a \le x \le b$, gör vi nu även en likformig indelning av intervallet $c \le y \le d$ enligt

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

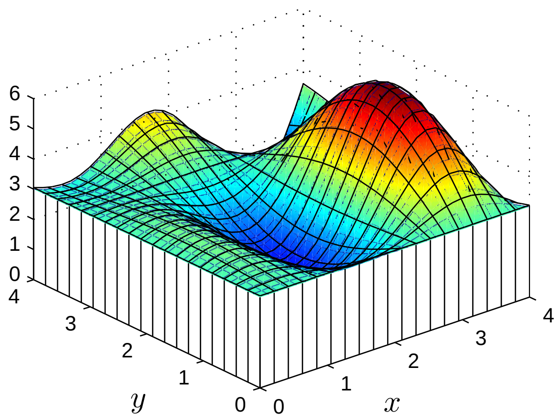
så att vi får m lika långa delintervall $y_{j-1} \le y \le y_j$ med samma bredd $k = \frac{d-c}{m}$.

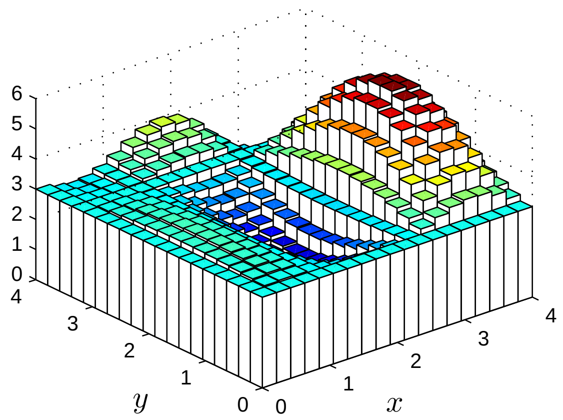
Vi får därmed en indelning av området $a \le x \le b,\; c \le y \le d$ i nm stycken likformiga små rektanglar som har arean hk var och en.

Om vi approximerar $f(x,y)$ med $f(x_{i-1}, y_{j-1})$ på området $x_{i-1} \le x \le x_i,\; y_{j-1} \le y \le y_j$, får vi **vänster rektangelregel** för dubbelintegralen

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} hk\, f(x_{i-1}, y_{j-1})$$





Vi approximerar varje liten delintegral med volymen av ett rätblock vars bas har arean hk och som har höjden $f(x_{i-1}, y_{j-1})$ och sedan summerar vi alla bidragen.

Om vi istället approximerar $f(x,y)$ med $f(x_i, y_j)$ får vi **höger rektangelregel** för dubbelintegralen

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} hk\, f(x_i, y_j)$$

Slutligen så får vi ett betydligt noggrannare resultat med **mittpunktsregeln**, där vi beräknar höjden mittpunkten i varje delrektangel, och **trapetsregeln** som vi får genom att ta medelvärdet av höjderna (funktionsvärdena) i alla fyra hörnpunkterna i varje delrektangel.

Uppgift 1. Beräkna i MATLAB en approximation av enkelintegralen

$$\int_0^1 x\,\sin(x)\,dx$$

med vänster och höger rektangelregel samt trapetsregeln. Använd funktionen `sum` i MATLAB för att få en enklare kod än om man använder `for`-satser.

Uppgift 2. Beräkna nu i MATLAB en approximation av dubbelintegralen

$$\int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y\,\sin(y+xy)\,dx\,dy$$

med vänster och höger rektangelregel samt trapetsregeln. Alla elementen i en matris summeras genom att man tar `sum` av `sum`. Jämför deras noggrannhet genom att räkna ut det exakta värdet av dubbelintegralen för hand.

3 Kvadraturprogram i MATLAB

I MATLAB finns `quad` och `quadl` för beräkning av enkelintegraler samt `dblquad` för beräkning av dubbelintegraler. Det finns också en funktion `triplequad` för beräkning av trippelintegraler.

Vill vi t.ex. integrerar funktionen $f(x,y) = y\,\sin(x) + x\,\cos(y)$ över området $\pi \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq \pi$ så gör vi det med

```
>> q=dblquad(@(x,y)y.*sin(x)+x.*cos(y),pi,2*pi,0,pi)
```

För att slippa problem, ta för vana att beskriva integranden som om du skulle rita dess funktionsyta. Dvs. tänk på `x` och `y` som matriser och använd komponentvisa operationer.

Skall vi beräkna en integral över ett mer allmänt område än $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, kan vi sätta funktionen till noll utanför det aktuella området och beräkna integralen över ett rektangulärt område, som innesluter det givna området.

Säg att vi skall beräkna

$$\iint_{x^2+y^2\leq r^2} \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

dvs. volymen innanför en halvsfär med radien r. Då kan vi istället beräkna

$$\int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

där $\rho(x,y)$ är 1 då $x^2+y^2 \leq r^2$ och 0 annars. Så här skulle vi kunna göra i MATLAB:

```
>> r=3;
>> f=@(x,y)sqrt(r^2-(x.^2+y.^2));
>> rho=@(x,y)x.^2+y.^2<=r^2;
>> q=dblquad(@(x,y)f(x,y).*rho(x,y),-r,r,-r,r)
```

Här får `rho(x,y)` värdet 1 (sant) då (x,y) tillhör mängden $x^2+y^2 \leq r^2$ och annars värdet 0 (falskt). Jämför gärna med exakt värde $\frac{2}{3}\pi r^3$.

Uppgift 3. Vi skall beräkna integralen

$$\int_0^2 \int_0^1 x\, \mathrm{e}^{xy}\, dx\, dy$$

Rita först funktionsytan till integranden över aktuellt område. Använd sedan `dblquad` för att beräkna integralen. Jämför gärna med exakt värde som du i så fall räknar ut för hand och jämför gärna med vad rektangel- och trapetsreglerna ger.

Uppgift 4. Vi skall se på integralen (Exempel 4, Adams 14.2)

$$\iint_D (a - x + y)\, dx\, dy$$

där $D = \{\, (x, y) \,|\, 0 \leq y \leq a - \frac{x^2}{a} \,\}$. Läs exemplet i boken och beräkna integralen med `dblquad` med lämpligt val av $\rho(x, y)$. Jämför med bokens exakta svar.

4 Redovisning

Denna vecka skall uppgifterna 1-4 redovisas för handledaren.