Integralen

Analys och Linjär Algebra, del B, K1/Kf1/Bt1

1 Inledning

Man kan inte alltid bestämma integraler $\int_a^b f(x)\,dx$ exakt utan man får nöja sig med att beräkna approximationer. T.ex. $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,dx$ kan inte beräknas exakt, eftersom det inte finns någon användbar formel för primitiv funktion till integranden.

Utgående från definitionen av Riemannsumman kommer vi beskriva några olika sätt att approximera integraler.

I senare studio-övningar skall vi använda liknande resonemang för att konstruera primitiv funktion och lösa differentialekvationer.

2 Riemannsumma

I Adams kapitel 5 definieras (konstrueras) integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ med hjälp av Riemannsumman

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)h_i$$

där vi har gjort en partition av intervallet

$$P:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

med steg $h_i = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ och där c_i är en godtycklig punkt i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Integralen är det unika gränsvärdet

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max h\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)h_i$$

Att det är unikt innebär att man får samma gränsvärde oberoende av hur man väljer partitionerna och hur man väljer c_i.

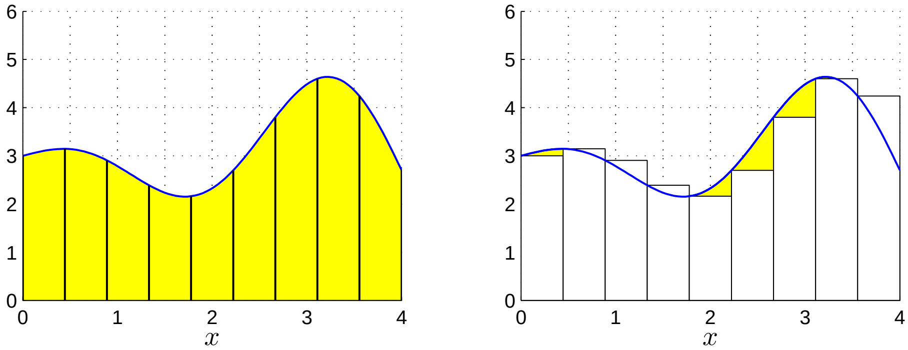
3 Rektangelregeln

Riemannsumman är alltså en numerisk approximation av integralen. Att beräkna integralen numeriskt kallas *numerisk kvadratur* (numerical quadrature) och en metod för numerisk kvadratur brukar kallas *kvadraturregel* (quadrature rule). Namnet kvadratur syftar på areaberäkning, dvs. att finna en kvadrat som har samma area som en given yta i planet.

Riemannsumman kallas även **rektangelregeln** därför att varje term i summan är arean av en rektangel med basen h_i och höjden $f(c_i)$, räknad med tecken.

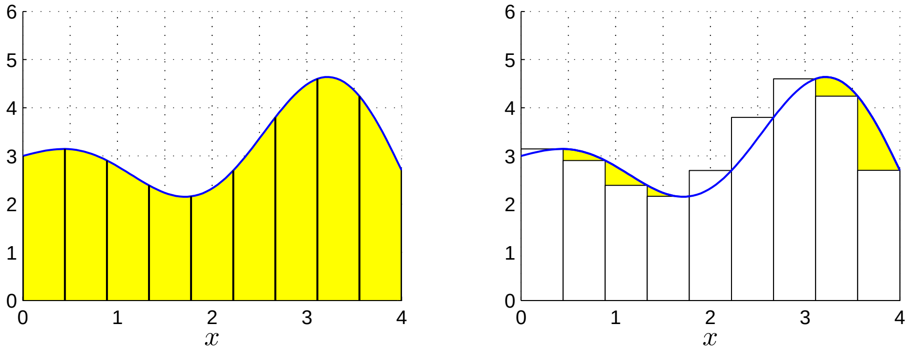
Antag att vi väljer c_i som den vänstra ändpunkten av det aktuella intervallet, dvs. $c_i = x_{i-1}$, och tar konstant steg $h_i = h$, då får vi **vänster rektangelregel**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\, f(x_{i-1})$$



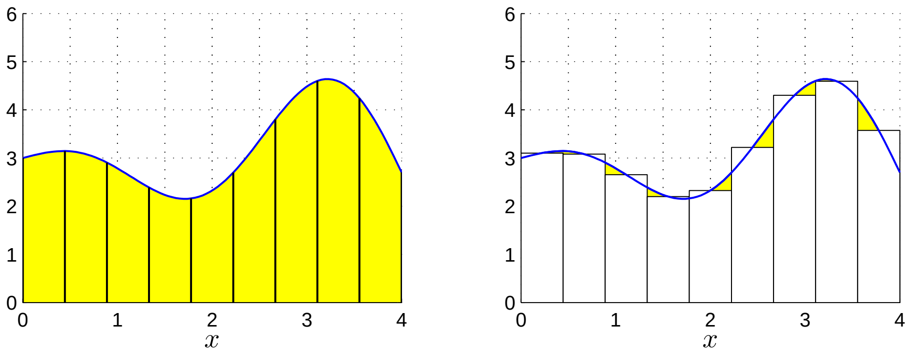
Om vi väljer c_i som den högra ändpunkten, dvs. $c_i = x_i$, så får vi **höger rektangelregel**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\, f(x_i)$$



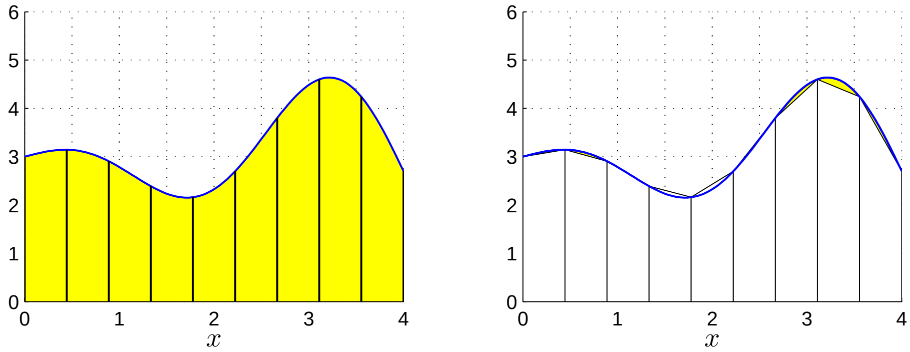
Tar vi istället c_i som mittpukten i intervallet, dvs. $x = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, så får vi **mittpunktsregeln** (Midpoint Rule)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \sum_{i=1}^{n} h\, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$



Om vi slutligen bildar medelvärdet av vänster och höger rektangelregel får vi **trapetsregeln** (Trapezoid Rule)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\,\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$$



Läs gärna om mittpunkts- och trapetsregeln i Adams kapitel 6.6.

4 Program i Matlab

Antag att vi vill beräkna $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$ med vänster rektangelregel med $n = 100$. Vi skulle kunna göra så här

```
>> n=100;
>> a=0; b=1;
>> f=@(x)x.*sin(x);
>> h=(b-a)/n
>> q=0;
>> for i=0:n-1
        x=a+i*h;
        q=q+h*f(x);
   end
```

I stället för att använda en `for`-sats genererar vi hellre en vektor av alla funktionsvärdena $f(x_i)$ och sedan summerar dessa med `sum` enligt

```
>> n=100;
>> a=0; b=1;
>> f=@(x)x.*sin(x);
>> x=linspace(a,b,n+1);
>> h=(b-a)/n;
>> q=sum(h*f(x(1:n)));
```

Detta sätt att organisera en beräkning kallas att vektorisera den, dvs. man genererar först en eller flera vektorer och utför sedan den önskade beräkningen på dem. De komponentvisa operationerna `.*` `./` `.^` är exempel på vektoriserade operationer.

Uppgift 1. Beräkna i Matlab en approximation av integralen

$$\int_0^1 x\,\sin(x)\,dx$$

med vänster och höger rektangelregel samt mittpunkts- och trapetsreglerna. Använd `sum`.

Uppgift 2. Skriv ett program `min_integral` med anropet `q=min_integral(f,I,n,k)` som beräknar integralen approximativt. Du skall använda programskalet `min_integral.m` (se studiohemsidan). In- och ut-variablerna förklaras i programskalet. Variabeln `k` skall användas för att välja metod enligt:

$$k = \begin{cases} 1, & \text{rektangelregeln vänster} \\ 2, & \text{rektangelregeln höger} \\ 3, & \text{mittpunktsregeln} \\ 4, & \text{trapetsregeln} \end{cases}$$

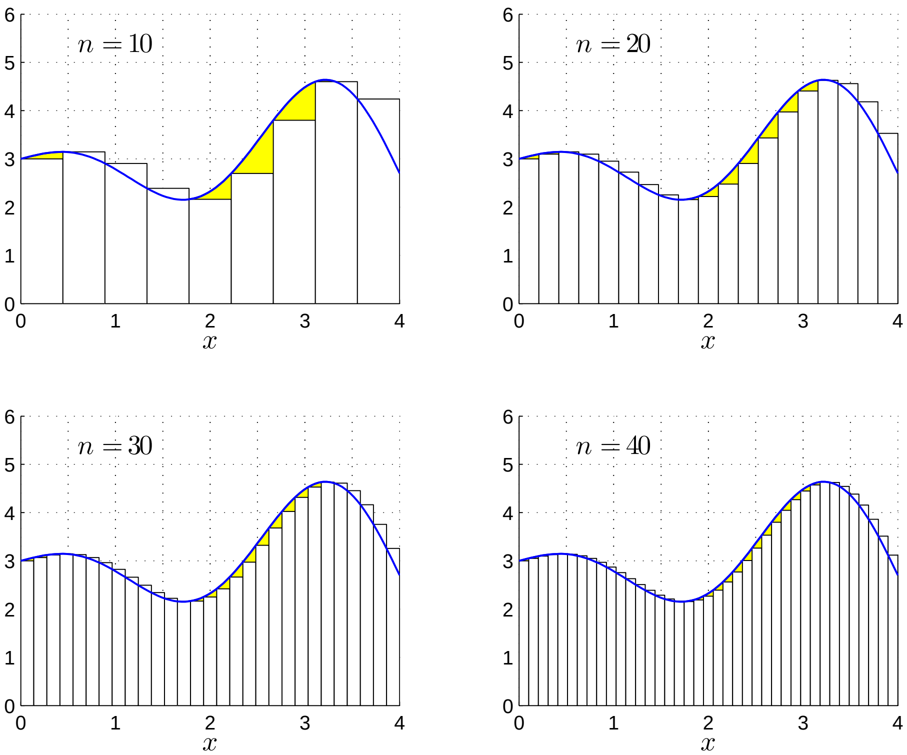
Uppgift 3. Testa ditt program `min_integral` på följande integraler. Variera n och k, dvs. antal delintervall respektive metod som används.

(a). $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ **(b).** $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **(c).** $\int_0^1 \tan(\sqrt{x})\,dx$

5 Konvergens

För de metoder vi har tittat på gäller att samtliga är konvergenta, dvs. låter vi antal delintervall n gå mot oändligheten så går approximationerna mot integralens värde.

Vi ser på några bilder för vänster rektangelregel där n blir allt större



Vi ser att vi allt bättre täcker upp ytan under grafen med allt fler och smalare staplar.

Nu räcker det i praktiken inte med konvergens. Vi måste få en bra approximation på en kort tid, dvs. inte behöva ta n alltför stort. För vänster och höger rektangelregel gäller att om vi fördubblar antal delintervall så halveras felet i approximationen av integralen. För mittpunkts- och trapetsreglerna gäller vid samma fördubbling att felet delas med fyra.

Uppgift 4. Vi ser på integralen $\int_0^1 x\sin(x)\,dx$ igen. Beräkna integralen exakt (för hand). Jämför exakt värde med de approximationer vi får med metoderna ovan för olika antal delintervall n. Hur stort blir felet? Tag t.ex först $n = 50$ och sedan $n = 100$, beräkna felen i approximationerna och se efter hur felen förändras.

6 Kvadraturprogram i Matlab

I Matlab finns bl.a. `quadl` för beräkning av integraler. Ett anrop av `quadl` kan se ut så här:

```
>> q=quadl(@(x)sin(x),0,1)
```

vilket integrerar funktionen $f(x) = \sin(x)$ över intervallet $0 \le x \le 1$.

För att slippa problem, ta för vana att beskriva integranden som om du skulle rita dess funktionsgraf, dvs. tänk på `x` som en vektor och använd komponentvisa operationer.

Uppgift 5. Gör uppgift 17 i Adams 5.7. Ledning: Se först på exempel 3 i Adams sid 326.

Uppgift 6. Beräkna arean av det slutna området mellan graferna till funktionerna $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ och $h(x) = x^2 - 3x + 2$. Använd `fzero` och `quadl`.

7 Redovisning

Denna vecka skall uppgifterna 1-6 redovisas för handledaren.

8 Inför nästa veckas studio-övning

Inför nästa veckas studio-övning, då vi skall se på lite tillämpning av integraler, är det viktigt att man i förväg läser igenom texten för studio-övningen.