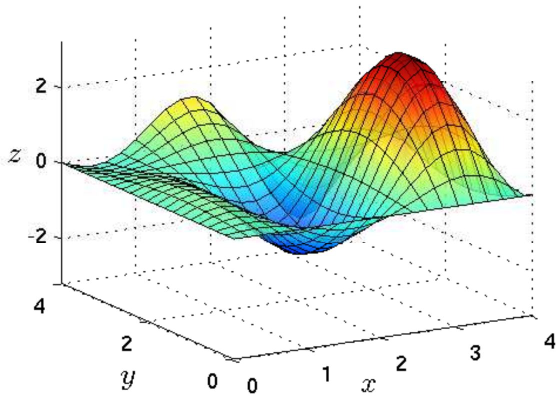
Grafritning – kurvor och ytor

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1

1 Inledning

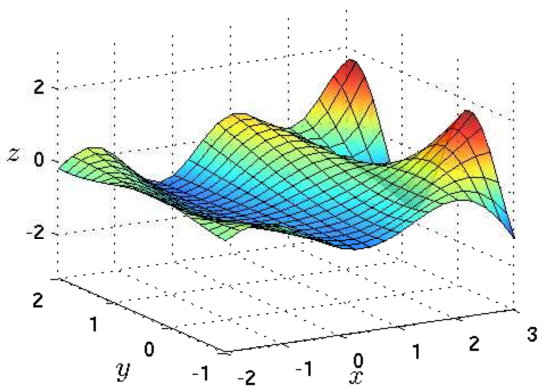
En graf till en funktion i en variabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är mängden $\{(x, y) : y = f(x)\}$, dvs. en kurva i planet. En graf till en funktion i två variabler $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är mängden $\{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$, dvs. en yta i rummet, som kallas för *funktionsyta*.

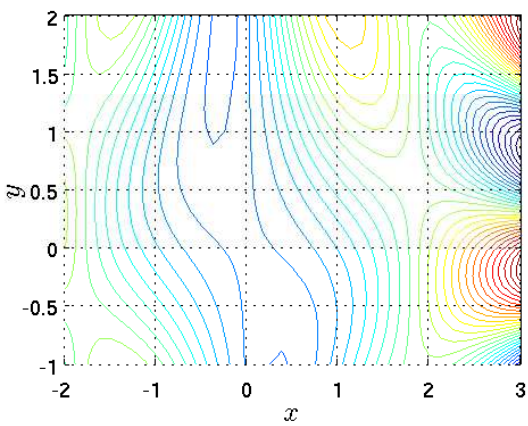
Som exempel tar vi $f(x, y) = x \cos(2x) \sin(y)$ över området $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.



Ett annat sätt att åskådliggöra en funktion i två variabler $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är att rita *nivåkurvor*, dvs. mängderna $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$, där c är en konstant som anger nivån.

Som exempel tar vi $f(x, y) = (\frac{1}{3}x^2 - 1) \sin(1 - xy)$ över området $-2 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$.

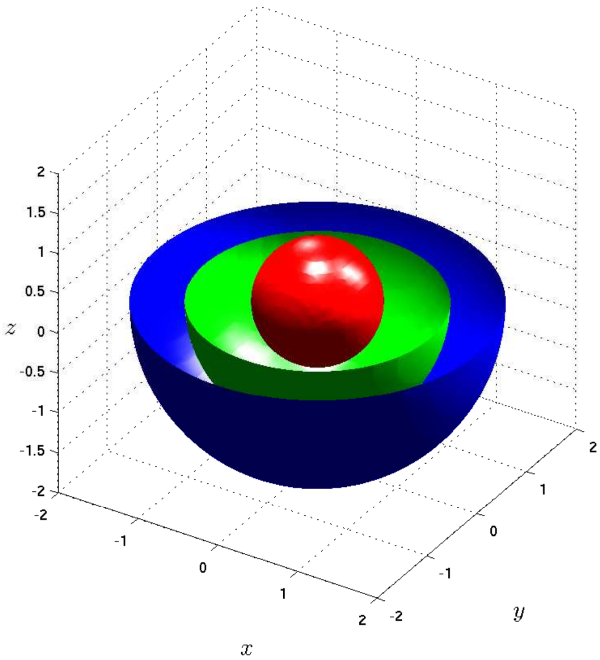




Vi får en slags topografisk karta av funktionen om vi ser funktionsytan som ett landskap och då blir nivån helt enkelt höjden över havet.

En reellvärd funktion i tre variabler $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kan vi inte rita en graf till. Det skulle vara en tredimensionellt objekt i ett fyrdimensionellt rum. Motsvarigheten till nivåkurvor blir *nivåytor*, dvs. mängderna $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}$ där c konstant. Dessa kan vi däremot rita upp.

Låt oss som exempel ta funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ i tre variabler. Nivåytorna blir då sfärer $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = c\}$ med centrum i origo. På de yttre ytorna har vi skalat av överdelen.



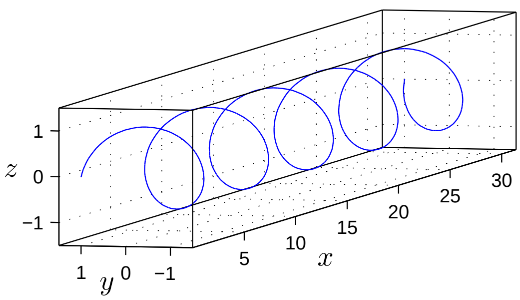
Vi skall också se på vektorvärda funktioner, dels parametrisering av kurvor i planet $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och i rummet $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dels parametrisering av ytor $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i rummet.

Exempelvis en cirkel med radien r och centrum i (a, b) kan parametriseras av $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ där

$$\boldsymbol{g}(t) = (x(t), y(t)) = (a + r\cos(t), b + r\sin(t))$$

med $0 \le t \le 2\pi$.

Ett exempel på en kurva i rummet är den här spiralen



som kan parametriseras av $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ där

$$\boldsymbol{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, \cos(t), \sin(t))$$

med $0 \le t \le 10\pi$.

2 Kurvor i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

Vi har redan ritat kurvor i $\mathbb{R}^2$ med kommandot `plot`, när vi skall rita kurvor i $\mathbb{R}^3$ kommer vi använda kommandot `plot3`.

Exempelvis enhetscirkeln parametriserad av $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ där

$$\boldsymbol{g}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ritar vi upp med

```
>> subplot(1,3,1)
>> t=linspace(0,2*pi);
>> plot(cos(t),sin(t))
```

Spiralen given av parametriseringen $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ där

$$\boldsymbol{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$$

får vi med (nu använder vi `plot3`)

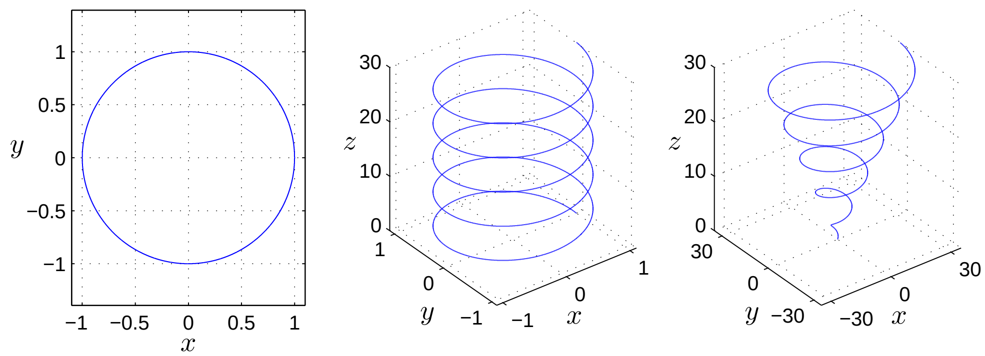
```
>> subplot(1,3,2)
>> t=linspace(0,10*pi);
>> plot3(cos(t),sin(t),t)
```

och den koniska spiralen given av

$$\boldsymbol{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t\cos(t), t\sin(t), t), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$$

ritar vi med (lägg märke till komponentvis multiplikation)

```
>> subplot(1,3,3)
>> plot3(t.*cos(t),t.*sin(t),t)
```



Uppgift 1. Rita upp följande kurvor i $\mathbb{R}^2$

(a). Asteroiden $\boldsymbol{g}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b). Cykloiden $\boldsymbol{g}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$

Kurvan beskriver den väg en myra, som fastnat på ett hjul, färdas när hjulet rullar framåt. Snyggast ser kurvan ut om man ger kommandot `axis equal`.

Uppgift 2. Rita upp följande kurvor i $\mathbb{R}^3$ med `plot3`

(a). $\boldsymbol{g}(t) = (\cos(10t), \sin(30t), t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b). $\boldsymbol{g}(t) = (\cos^3(10t), \sin^3(10t), t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

3 Funktionsytor i $\mathbb{R}^3$

Vi ser på funktionsytan, eller grafen, till funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ där

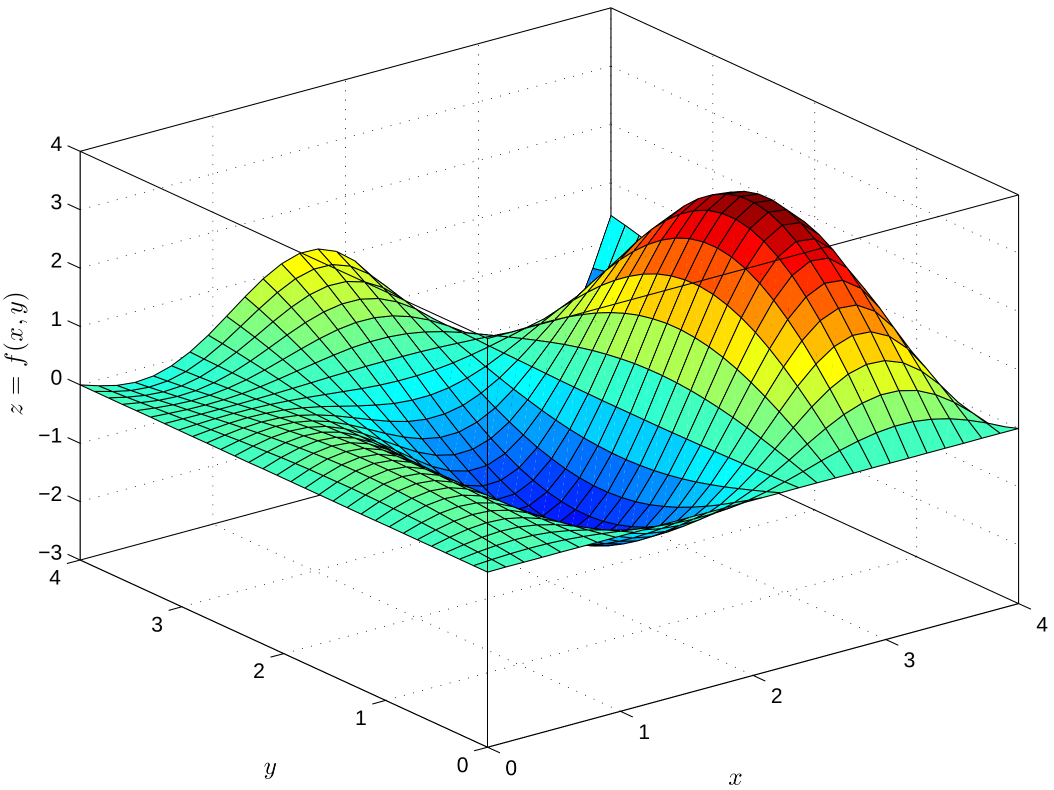
$$f(x, y) = x \cos(2x) \sin(y)$$

över området $0 \leq x \leq 4$ och $0 \leq y \leq 4$.

Den yta vi skall rita upp består av alla punkter $(x, y, f(x, y))$ i $\mathbb{R}^3$ där $0 \leq x \leq 4$ och $0 \leq y \leq 4$.

Resultatet får vi med kommandot `surf`, vilket är motsvarigheten till `plot` då vi skall rita ytor.

```
>> x=linspace(0,4,30); y=linspace(0,4,30);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=X.*cos(2*X).*sin(Y);
>> surf(X,Y,Z)
>> grid on, box on
>> xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z = f(x,y)')
```

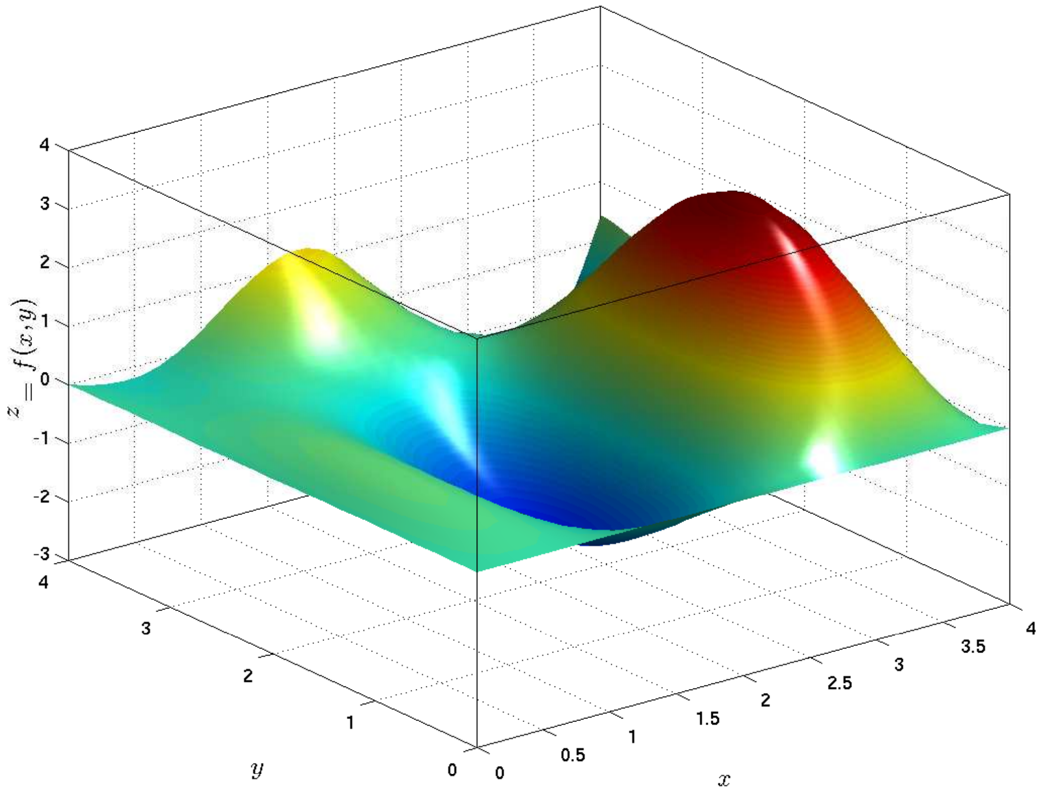


Funktionen `meshgrid` får två vektorer `x` och `y`, med x- och y-värden, som indata och ger två matriser `X` och `Y` som utdata. Dessa matriser är uppbyggda så att vi kan göra en matris `Z` med alla $f(x, y)$-värden på en gång genom att skriva av vår matematiska formel för $f(x, y)$ bara vi samtidigt ersätter x med `X` och y med `Y`. Vi måste dock också tänka på att använda komponentvisa operationer rakt igenom.

Ritar vi en graf av en funktion i en variabel tar vi kanske några hundratal x-värden. När vi ritar en funktionsyta tar vi istället några tiotal x- respektive y-värden.

Vi kan också lägga på belysning, välja mellan olika belysningsmodeller och välja mellan olika reflexionsmodeller (material).

```
>> shading interp                    % flat, interp, faceted
>> camlight right                    % left, right, headlight
>> lighting phong                    % none, flat, phong, gouraud
>> material shiny                    % shiny, dull, metal
```



Med kommandot `surf(X,Y,Z,'facealpha',0.7)` får vi ytan lite genomskinlig, där värdet vi ger `facealpha` avgör graden av genomskinlighet (0 för helt transparent och 1 för helt solid).

Uppgift 3. Rita funktionsytan till funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ där

$$f(x, y) = -xye^{-2(x^2+y^2)}$$

över området $-2 \leq x \leq 2, \; -2 \leq y \leq 2$.

Hur fungerar det?

Den yta vi skall rita består av alla punkter $(x, y, f(x, y))$, där $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ och $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$. Då vi skall rita ytan med **`surf`** krävs att vi bildar en $m \times n$-matris $\boldsymbol{Z}$ med elementen

$$z_{ij} = f(x_j, y_i)$$

där $x_{\min} = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x_{\max}$ och $y_{\min} = y_1 < y_2 < \cdots < y_m = y_{\max}$.

Lägg märke till ordningen på indexen, element z_{ij} skall innehålla funktionsvärdet för $x = x_j$ och $y = y_i$. Stigande x-värden längs rader i $\boldsymbol{Z}$, dvs. stigande kolonn-index, och stigande y-värden längs kolonner i $\boldsymbol{Z}$, dvs. stigande rad-index.

Vi går igenom några alternativa lösningar och vi tänker oss att vi i Matlab redan skapat en funktion `f` och koordinat-vektorer `x` och `y` med `n` respektive `n` element.

Alternativ 1. Vi bildar matrisen `Z` i Matlab med

```
Z=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        Z(i,j)=f(x(j),y(i));
    end
end
```

Alternativ 2. I första alternativet fick hålla reda på var det skulle vara `i` respektive `j`. Med funktionen `meshgrid` skapas två matriser `X` och `Y` så att `X(i,j)` har värdet `x(j)` och `Y(i,j)` har värdet `y(i)`, dvs. indexproblemet är borta.

```
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        Z(i,j)=f(X(i,j),Y(i,j));
    end
end
```

Alternativ 3. Den allra smidigaste lösningen får vi då vi låter de nästlade repetitionssatserna i tidigare alternativ ersättas av komponentvisa operationer. Dvs. vår funktion `f` måste använda komponetvisa operationer. Vi slipper även initieringen av `Z`.

```
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);
```

Så här enkel blir uppgift 3 med det sista alternativet

```
>> x=linspace(-2,2,30);
>> y=linspace(-2,2,30);
>> f=@(x,y)-x.*y.*exp(-2*(x.^2+y.^2));
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
>> surf(X,Y,Z)
```

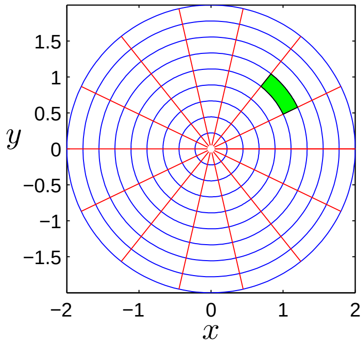
Lämplig läsning om funktionsytor är avsnitt 5.4 i Moore.

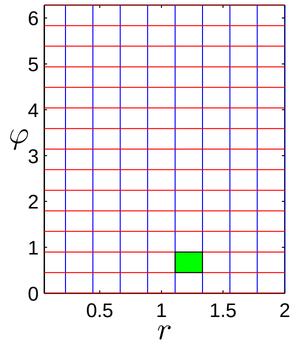
Polära koordinater

Ibland behöver man byta variabler för att på ett lättare eller bättre sätt behandla ett problem. Ett exempel på variabel- eller koordinatbyte är *polära koordinater*

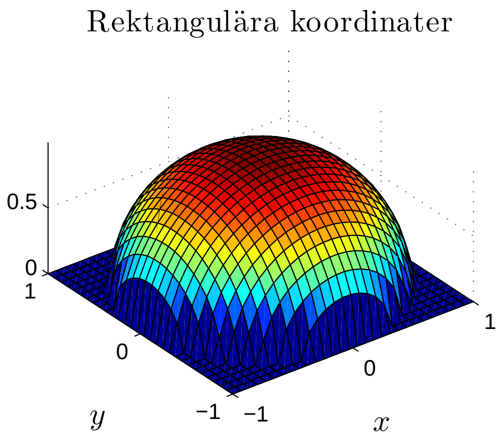
$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

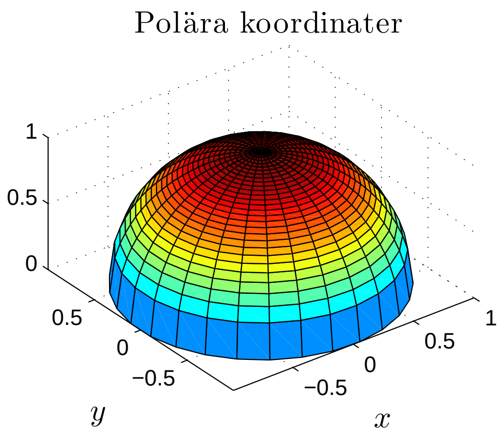
där $(x, y) \neq (0, 0)$ samt $r > 0$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$.





Vill vi t.ex. rita grafen av $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ över området $x^2+y^2 \leq 1$, dvs. en halvsfär, och använder rektangulära koordinater får vi den inte alltför snygga figuren nedan till vänster men använder vi polära koordinater får vi den lite snyggare till höger.






```
>> subplot(1,2,1)                 % Rektangulära koordinater
>> x=linspace(-1,1,30); y=linspace(-1,1,30);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> U=1-X.^2-Y.^2;
>> U(find(U<0))=0;                % Sätter negativa värden till noll,
>> Z=sqrt(U);                     % så att vi kan ta roten ur utan problem
>> surf(X,Y,Z)

>> subplot(1,2,2)                 % Polära koordinater
>> r=linspace(0,1,30); t=linspace(0,2*pi,30);
>> [R,T]=meshgrid(r,t);
>> X=R.*cos(T); Y=R.*sin(T);
>> Z=sqrt(1-R.^2);
>> surf(X,Y,Z)
```

Uppgift 4. Rita upp de ytor som är grafer till nedanstående funktioner med `surf`:

(a). $f(x,y) = x + 2y - 2, \quad (x,y) \in [1,2] \times [3,4]$

(b). $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad (x,y) \in [-2,2] \times [-2,2]$

(c). $f(x,y) = (1-y^2)^{1/2}, \quad (x,y) \in [0,3] \times [-1,1]$

(d). $f(x,y) = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad (x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$ (Använd polära koordinater)

(e). $f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (Använd polära koordinater)

Uppgift 5. Återskapa figur 12.4 i Adams. Dvs. rita grafen för funktionen

$$f(x,y) = -\frac{6x}{2 + x^2 + y^2}$$

över ett lämpligt område. Gör detta för både rektangulära och cirkulära områden.

4 Nivåkurvor i $\mathbb{R}^2$

Istället för att rita upp funktionsytan är det ibland bättre att visualisera en funktion genom en konturplot, det vill säga rita tvådimensionella nivåkurvor i planet.

Lösningsmängden till ekvationen $f(x,y) = c$, där c är en konstant, beskriver en *(nivå)kurva* i xy-planet. Genom att rita ut flera sådana kurvor för olika värden på c erhåller man en tvådimensionell (topografisk) karta, med vilken man kan utläsa funktionsytans utseende.

Till exempel använder vanliga orienteringskartor detta sätt för att beskriva olika höjder i naturen. Tekniken används också för bland annat väderkartor, där isobarer och isotermer är nivåkurvor för de funktioner som beskriver lufttryck respektive temperatur.

För att skapa en nivåkurva i MATLAB så använder vi kommandot `contour`. Det är också möjligt att rita både yta och nivåkurvor i samma graf med kommandot `surfc`. Läs mer i Moore avsnitt 5.4.

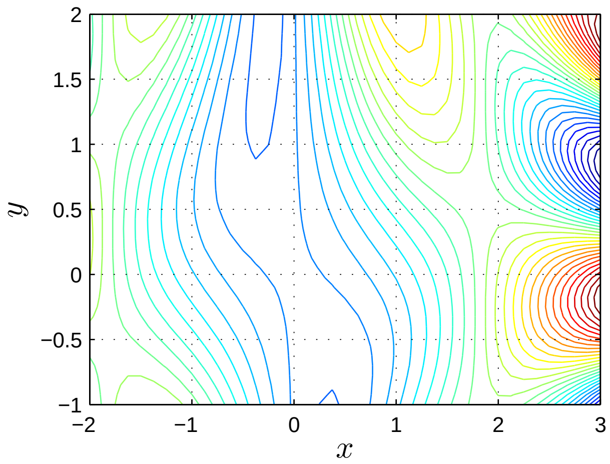
Som exempel ser vi på funktionen vars nivå-kurvor vi visade en bild av i inledningen

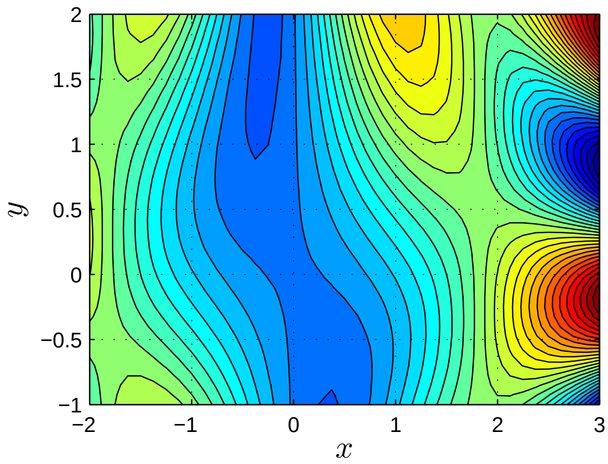
$$f(x,y) = (\frac{1}{3}x^2 - 1)\sin(1 - xy), \quad -2 \leq x \leq 3, \; -1 \leq y \leq 2$$

Vi får bilden nedan med

```
>> x=linspace(-2,3,40); y=linspace(-1,2,40);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> f=@(x,y)(0.3*x.^2-1).*sin(1-x.*y);
>> Z=f(X,Y);
>> contour(X,Y,Z,30)
```

Vi får ifyllda nivåkurvor med `contourf`.





Uppgift 6. Rita nivåkurvor till funktionerna i uppgift 4. Gå in och redigera cellerna så att ni samtidigt ser både funktionsytan och nivåkurvorna. Använd `subplot`.

Uppgift 7. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^2 - 15y$$

Rita ytan över ett lämpligt område samt skapa en konturplot. Rita några enstaka nivåkurvor.

Uppgift 8. Låt

$$f(x,y) = x\sin(y) + y\cos(x) - xy$$

Nivåkurvan $f(x,y) = 0$ delar in xy-planet i ett antal områden. Förklara varför funktionen $f(x,y)$ inte växlar tecken inom var och en av områdena. I vilka av områdena är $f(x,y) > 0$?
Ledning: Rita nivåkurvorna $f(x,y) = c$ för $c = 0, -0.2$ respektive 0.2.

5 Nivåytor i $\mathbb{R}^3$

För att rita nivåytor använder vi `isosurface`. Vi tar exemplet från inledningen, dvs. funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ i tre variabler. Nivåytorna blir då sfärer $\{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 = c\}$ och vi ritar upp för $c = 4$.

```
>> x=linspace(-2,2,30); y=linspace(-2,2,30); z=linspace(-2,2,30);
>> [X,Y,Z]=meshgrid(x,y,z);
>> F=X.^2+Y.^2+Z.^2;

>> p=patch(isosurface(X,Y,Z,F,4));
>> set(p,'facecolor','r','edgecolor','none');
>> axis equal, axis([-2 2 -2 2 -2 2]), grid on
```

Vi får nog skjuta detaljerna på framtiden, men vi fick till ett rött klot (med radien 2) i alla fall.

6 Allmänna ytor i $\mathbb{R}^3$

Som exempel på en allmän yta i rummet tar vi en cylinder med radien r och höjden h som beskrivs matematiskt av

$$\{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 = r^2, 0 \le z \le h\}$$

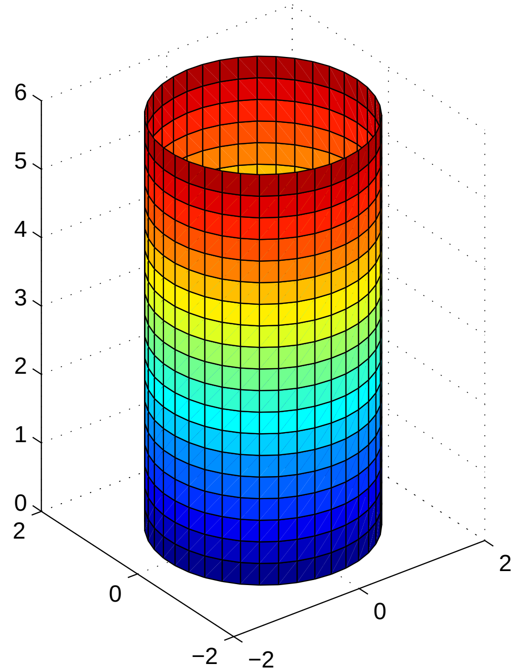
Vi kan också göra en s.k. parametrisering

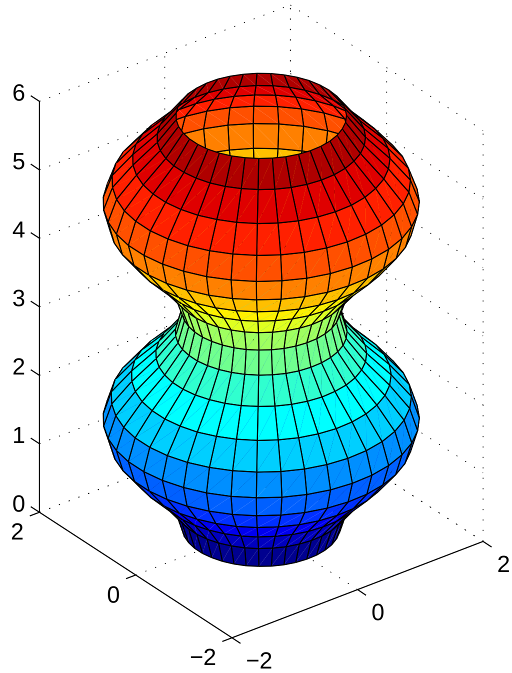
$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \\ z = s\ , \end{cases} \quad \begin{matrix} , \quad 0 \le t \le 2\pi \\ \\ 0 \le s \le h \end{matrix}$$

vilket passar oss när vi skall rita bilden i MATLAB.

```
>> r0=1.5; h=6; n=40; m=20;
>> s=linspace(0,h,m)'; t=linspace(0,2*pi,n);
>> r=r0*ones(size(s));
>> X=r*cos(t);
```

```
>> Y=r*sin(t);
>> Z=s*ones(size(t));
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal, axis([-2 2 -2 2 0 6])
```





För cylindern hade vi $r(s) = r_0$, dvs. ett konstat värde (samma radie). Om vi istället låter $r(s) = 1 + \sin(s)^2$ (varierande radie) så blir det lite roligare. Detta är ett exempel på en *rotationsyta*. Sådana pratade vi om i ALA-B i samband med volymberäkning (Adams kap 7.1).

Nu ritar vi upp rotationsytan. Var skiljer sig koden nedan från den för cylindern?

```
>> h=6; n=40; m=20;
>> s=linspace(0,h,m)'; t=linspace(0,2*pi,n);
>> r=1+sin(s).^2;
>> X=r*cos(t);
>> Y=r*sin(t);
>> Z=s*ones(size(t));
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal, axis([-2 2 -2 2 0 6])
```

Vi ser nu avslutningsvis på två parametriserade ytor som till utseendet är välbekanta.

En *sfär* med radien r och centrum i origo ges av

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

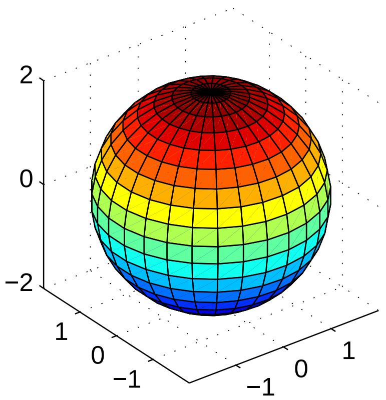
och kan parametriseras med

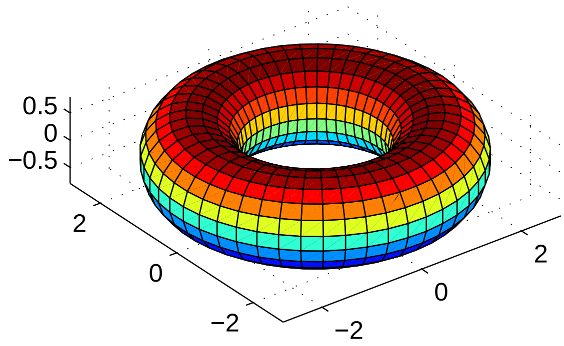
$$\begin{cases} x(s,t) = r\cos(s)\cos(t) \\ y(s,t) = r\cos(s)\sin(t) \\ z(s,t) = r\sin(s) \end{cases}$$

där $-\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ och $0 \leq t \leq 2\pi$.

Vi ritar en sfär med radien $r = 2$ enligt

```
>> r=2; n=20; m=30;
>> s=linspace(-pi/2,pi/2,n); t=linspace(0,2*pi,m);
>> [S,T]=meshgrid(s,t);
>> X=r*cos(S).*cos(T);
>> Y=r*cos(S).*sin(T);
>> Z=r*sin(S);
>> surf(X,Y,Z)
```





En *torus* med lateralradien r och centralradien a samt centrum i origo ges av

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

och kan parametriseras med

$$\begin{cases} x(s,t) = (a + r\cos(s))\cos(t) \\ y(s,t) = (a + r\cos(s))\sin(t) \\ z(s,t) = r\sin(s) \end{cases}$$

där $-\pi \leq s \leq \pi$ och $0 \leq t \leq 2\pi$.

Vi ritar en torus med lateralradien $r = 0.8$ och centralradien $a = 2$ enligt

```
>> r=0.8; a=2; n=20; m=50;
>> s=linspace(-pi,pi,n); t=linspace(0,2*pi,m);
>> [S,T]=meshgrid(s,t);
>> X=(a+r*cos(S)).*cos(T);
>> Y=(a+r*cos(S)).*sin(T);
>> Z=r*sin(S);
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal
```

7 Redovisning

Denna vecka skall uppgifterna 1-8 redovisas för handledaren.