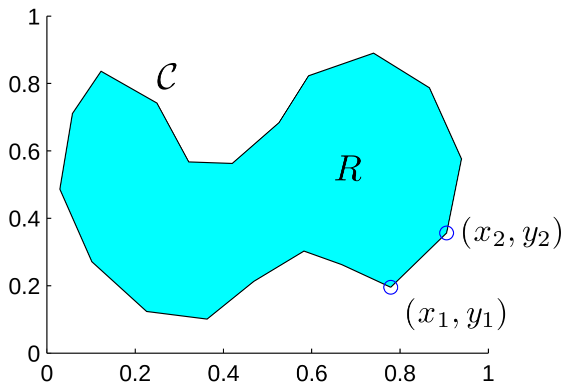
Arean av ett polygonområde

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1

Vi har i studioövningen ”Programmering i MATLAB” i ALA-A beräknat arean av ett polygonområde med formeln

$$A = \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} + x_i)(y_{i+1} - y_i) \right|$$

Här förutsätts att polygontåget som beskriver området $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ är slutet, dvs. att $x_n = x_1$ och $y_n = y_1$.



Nu skall vi använda Greens formel, se Adams sid 904, för att bevisa formeln.

Vi betecknar polygonområdet med R och dess rand med $\mathcal{C}$, randen har positiv orientering och genomlöper polygontåget i ordningen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$.

$$A(R) = \iint_R 1\, dx\, dy = \left\{ \begin{array}{ll} P = 0, & Q = x \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0, & \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{array} \right\} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Greens formel med} \\ \boldsymbol{F} = (P, Q) \end{array} \right\} = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_{\mathcal{C}} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy =$$

$$= \{\ P = 0,\ \ Q = x\ \} = \oint_{\mathcal{C}} x\, dy = \oint_{\mathcal{C}} x(t)\, y'(t)\, dt$$

där $\mathcal{C}$ parametriseras $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$.

Nu gäller att

$$\oint_{\mathcal{C}} x(t)\, y'(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathcal{C}_i} x(t)\, y'(t)\, dt$$

där $\mathcal{C}_i$ är randsegmentet från (x_i, y_i) till (x_{i+1}, y_{i+1}).

Varje segment $\mathcal{C}_i$ är linjärt och kan enkelt parametriseras

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)x_i + t\, x_{i+1} \\ y(t) = (1-t)y_i + t\, y_{i+1} \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

Alltså har vi

$$\int_{\mathcal{C}_i} x(t)\, y'(t)\, dt = (y_{i+1} - y_i) \int_0^1 ((1-t)x_i + t\, x_{i+1})\, dt = (y_{i+1} - y_i)\frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$$

Vi har slutligen kommit fram till

$$A(R) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathcal{C}_i} x(t)\, y'(t)\, dt = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} + x_i)$$