Tillämpning av integraler

Analys och Linjär Algebra, del B, K1/Kf1/Bt1

1 Inledning

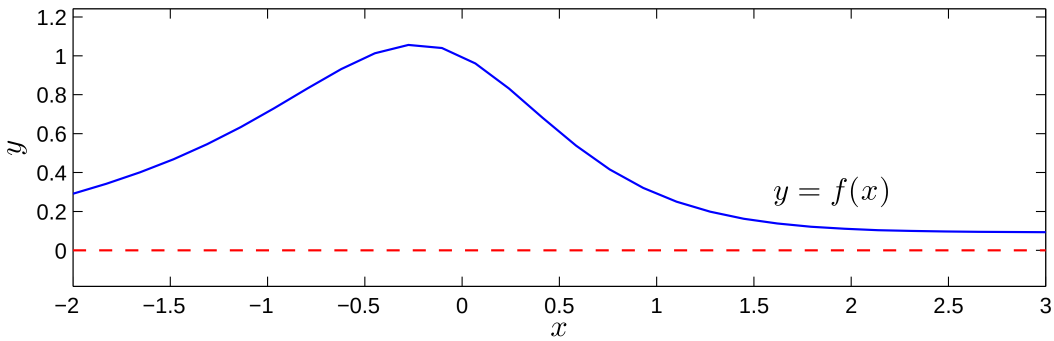
Vi skall se på två tillämpningar av integraler. Först arean och volymen av en rotationskropp sedan omkretsen av en ellips.

2 Rotationskroppar

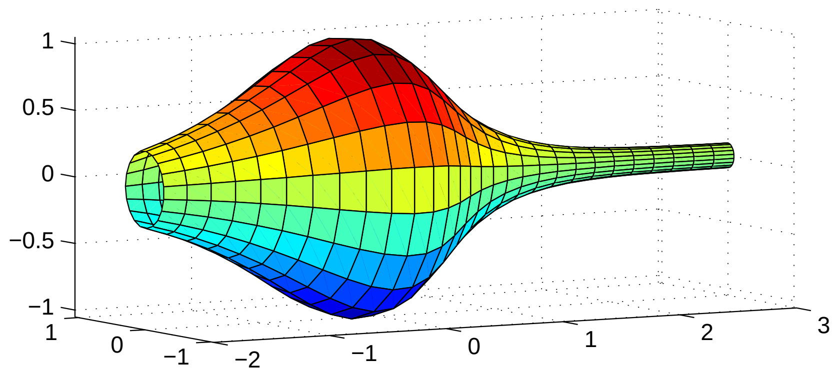
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion $y = f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$. Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{1 - 0.5\,\sin(x)}{1 + x^2}, \qquad -2 \leq x \leq 3$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt x-axeln får vi en s.k. rotationsyta



och vi vill den inneslutna volymen samt rotationsytans area.

Volymen som begränsas av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.1, sid 392)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

och arean av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.3, sid 407)

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

För vårt exempel nöjer vi oss med en numerisk beräkning av volym V och ytarea S enligt

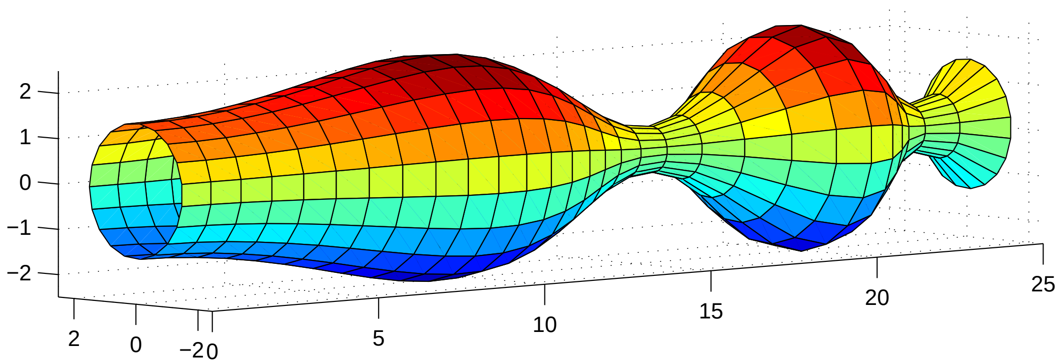
```
>> f=@(x)(1-0.5*sin(x))./(1+x.^2);
>> Df=@(x)-0.5*cos(x)./(1+x.^2)-(1-0.5*sin(x))*2.*x./(1+x.^2).^2;
>> a=-2; b=3;
>> V=pi*quadl(@(x)f(x).^2,a,b)
V =
     5.1095

>> S=2*pi*quadl(@(x)abs(f(x)).*sqrt(1+Df(x).^2),a,b)
S =
   16.3260
```

Uppgift 1. Beräkna volymen och arean av rotationsytan som bildas då grafen till

$$f(x) = 1.5 + \sin(0.02\,x^2), \quad 0 \le x \le 25$$

roterar runt x-axeln.

Så här ser ytan ut



Om du vill se koden som genererar ytan kan du titta på funktionen `rotationsyta` som ligger på studiohemsidan (förståelsen får kanske vänta till flervariabelanalysen i läsperiod 3).

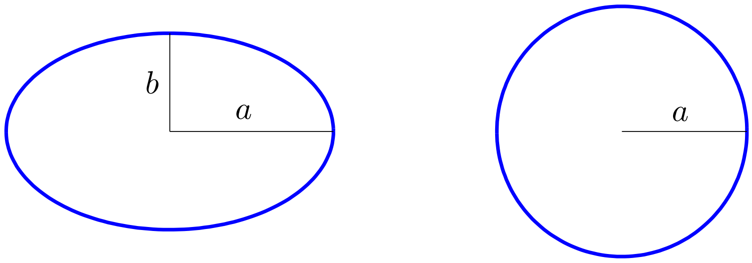
3 Omkrets av en ellips

En ellips med storaxel a och lillaxel b kan beskrivas med ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Om vi tar $a = b$ får vi en cirkel med radien a.

Arean av en ellips är som ni nog vet $A = \pi ab$ och har vi en cirkel ($a = b$) så får vi arean $A = \pi a^2$. Omkretsen av cirkel är $s = 2a\pi$ men omkretsen av en ellips kan inte beskrivas lika enkelt.



Man visar i Adams kapitel 7.3, sid 407, att omkretsen av en ellips är $s = 4aE(\varepsilon)$, med

$$E(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(t)}\, dt, \quad \text{där} \;\; \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Här kallas ε för excentriciteten och det gäller att $0 \leq \varepsilon < 1$.

Vi ser att för en cirkel så är $\varepsilon = 0$ och då ellipsen är nästan helt tillplattad så är ε nära 1. För en cirkel gäller $s = 4aE(0) = 4a\frac{\pi}{2} = 2a\pi$, så klart.

Integralen $E(\varepsilon)$, som kallas för en elliptisk integral av andra slaget, kan inte beräknas exakt utan vi får nöja oss med approximationer.

Uppgift 2. Nu är det dags för er att beräkna integralen för olika värden på ε med `quadl` och rita en graf av $E(\varepsilon)$ över intervallet $0 \leq \varepsilon < 1$.

Ledning: Man kan i MATLAB beräkna $f(x) = \int_c^d g(x,t)\, dt$ för en parameter x, som vi kan ge olika värden, enligt

```
>> y=quadl(@(t)g(x,t),c,d)
```

Här förutsätts att `g` är en funktionsbeskrivning (funktionsfil eller anonym funktion) i de två variablerna `x` och `t`. Variabeln `y` ges värdet av $f(x)$ för ett x-värde som finns i variabeln `x`.

Skall vi nu rita en graf av $f(x)$ för $a \leq x \leq b$, så är här strukturen på en skriptfil

```
g=@(x,t)...;             % Integranden, om vi gör ett funktionshandtag
c=...; d=...;            % Integrationsgränserna
a=...; b=...; n=...;     % Intervallgränser för grafen samt antal punkter
x=linspace(a,b,n);       % x-värdena
f=zeros(size(x));        % Fördimensionering. Skall fylla på integralvärdena
for i=1:length(x)
    f(i)=quadl(@(t)g(x(i),t),c,d);   % f(x)-värdena
end
plot(x,f)                % Ritar grafen
```

Vi tittar närmare på `f=zeros(size(x))`. Här ger `size(x)` storleken på radvektorn `x`. Därmed ger `zeros(size(x))` en radvektor, lika stor som `x`, fylld med nollor. Nu kommer `f` vara en radvektor av rätt storlek och vi fyller på rätt värden i `for`-satsen.

4 Redovisning

Denna vecka skall uppgifterna 1-2 redovisas för handledaren.

5 Inför nästa veckas studio-övning

Inför nästa veckas studio-övning är det viktigt att man i förväg läser igenom texten för studio-övningen. Första delen ”Primitiv funktion” kan vi göra första passet och delen ”Allmän ODE” kan vi göra andra passet. Veckan därpå skall vi göra kemiprojektet och då måste vi vara klara med studio-övningen med differentialekvationer.