System av ordinära differentialekvationer

1 Inledning

Vi skall se lite på system av ordinära differentialekvationer av typen

$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$$

och vi skall se hur högre ordningens differentialekvationer kan skrivas om som system av första ordningens ekvationer.

2 System av differentialekvationer

Som exempel på ett system av ekvationer tar vi: *Populationsdynamik* – Vi betraktar population av bytesdjur (kaniner) som lever tillsammans med en population rovdjur (rävar). Låt $u_1(t)$ respektive $u_2(t)$ beteckna antalet kaniner respektive rävar vid tiden t. En enkel matematisk modell för populationernas utveckling ges av Volterra-Lotka-ekvationerna:

$$\begin{cases} u_1'(t) = a\, u_1(t) - b u_1(t) u_2(t) \\ u_2'(t) = -c\, u_2(t) + d\, u_1(t) u_2(t) \end{cases}$$

Koefficienterna a, b, c, d är positiva. Termen $a\, u_1(t)$ representerar netto-födelse-dödstalet i en ensam kaninpopulation. Termen $-c\, u_2(t)$ är motsvarande för rävarna. Termen $-b\, u_1(t)u_2(t)$ är antalet kaniner som blir uppätna per tidsenhet. Termen $d\, u_1(t)u_2(t)$ är antalet rävar per tidsenhet som överlever på grund av tillgång på föda. Observera teckenkombinationen i ekvationerna. Vad blir lösningen om populationerna är ensamma ($b = d = 0$)?

Vår differentialekvation har formen

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases}$$

där

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} a\, u_1 - b\, u_1\, u_2 \\ -c\, u_2 + d\, u_1\, u_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$$

Detta är precis samma typ vi började med, fast nu har vi vektorer. Metoderna vi såg på då fungerar lika bra nu.

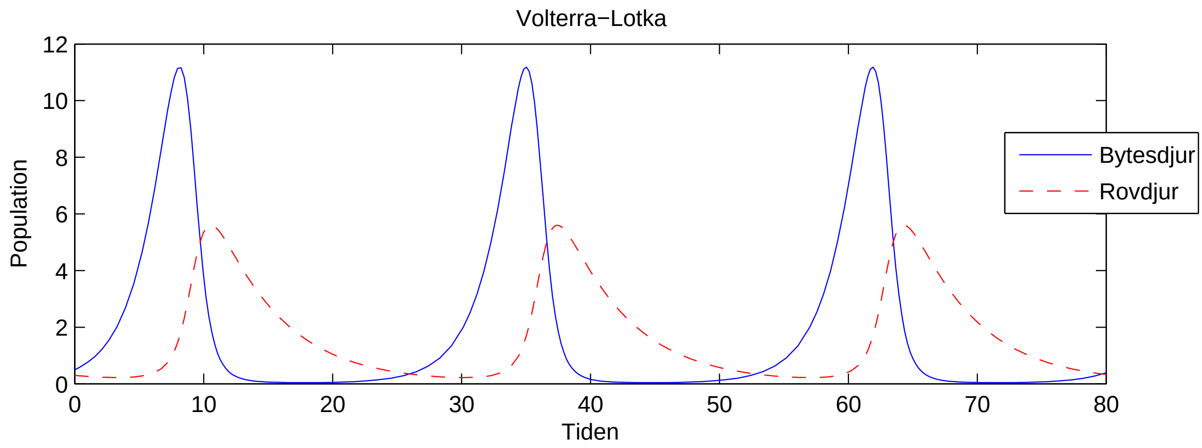
Vi beskriver högerledet i differentialekvationen med en funktion

```
function f=volterra(t,u)
    a=0.5; b=0.3; c=0.2; d=0.1;
    f=[ a*u(1)-b*u(1)*u(2)
       -c*u(2)+d*u(1)*u(2)];
```

Vi löser sedan med funktionen `ode45` och ritar upp enligt

```
>> u0=[0.5;0.3];
>> [t,U]=ode45(@volterra,[0 80],u0);
```

```
>> figure(1), clf
>> plot(t,U(:,1),t,U(:,2),'r--')
>> legend('Bytesdjur','Rovdjur')
>> xlabel('Tiden'), ylabel('Population')
>> title('Volterra-Lotka')
```

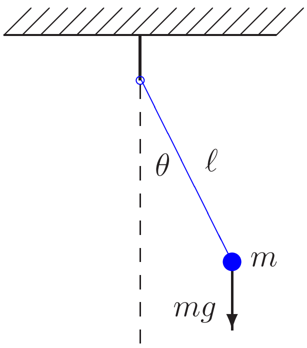


Uppgift 1. Lös Volterra-Lotka-ekvationerna med `ode45`. Ändra koefficienterna till $a = 0.5$, $b = 0.3$, $c = 0.2$, $d = 0.05$.

3 Högre ordningens differentialekvationer

Högre ordningens differentialekvationer kan skrivas om som system av första ordningen. Dessa system kan sedan lösas numeriskt.

Som exempel tar vi den matematiska pendeln. En masspunkt med massan m hänger i en viktlös smal stav av längden ℓ.



Med beteckningarna i figuren och Newtons andra lag får vi rörelseekvationen

$$m\ell\,\ddot{\theta}(t) = -mg\sin(\theta(t))$$

Vi vill bestämma lösningen för olika begynnelseutslag θ_0, dvs. $\theta(0) = \theta_0$, då vi släpper pendeln från vila, dvs. $\dot{\theta}(0) = 0$.

Om vi låter $\varphi = \dot{\theta}$, dvs. inför vinkelhastigheten, kan ekvationen skrivas

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \varphi, & \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta), & \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

För att komma till standardform låter vi $u_1 = \theta$ och $u_2 = \varphi$ och får

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1(0) = \theta_0 \\ u_2' = -\frac{g}{\ell}\sin(u_1), & u_2(0) = 0 \end{cases}$$

Nu har vi standardformen

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \end{cases}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(u_1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi beskriver differentialekvationen i MATLAB med funktionen

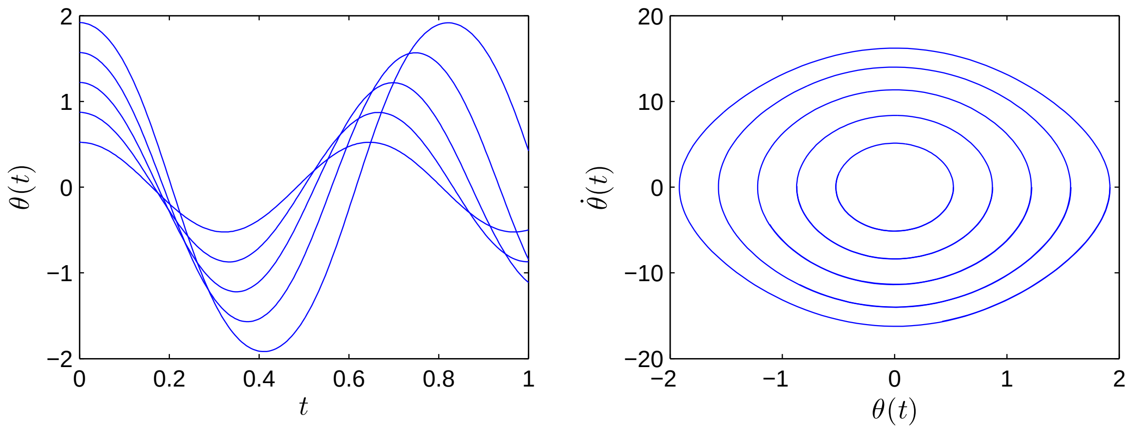
```
function f=pendel(t,u,g,l)
    f=[u(2)
       -g/l*sin(u(1))];
```

Följer lösningskurvorna med `ode45` för några olika begynnelseutslag och ritar en bild som visar lösningarna $(t, \theta(t))$ och fasporträtten $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ för de olika begynnelseutslagen.

```
g=9.81; l=0.1; theta0=[30:20:110]*pi/180;
tspan=linspace(0,1,200);

for k=1:length(theta0)
    u0=[theta0(k);0];
    [t,U]=ode45(@(t,u)pendel(t,u,g,l),tspan,u0);
    subplot(1,2,1), plot(t,U(:,1)), hold on
    subplot(1,2,2), plot(U(:,1),U(:,2)), hold on
end

subplot(1,2,1), hold off
xlabel('$t$','interpreter','latex','fontsize',12)
ylabel('$\theta(t)$','interpreter','latex','fontsize',12),
subplot(1,2,2), hold off
xlabel('$\theta(t)$','interpreter','latex','fontsize',12)
ylabel('$\dot{\theta}(t)$','interpreter','latex','fontsize',12)
```



Från figuren ser vi att periodlängden ökar med ökande begynnelseutslag.

Uppgift 2. En dämpad matematisk pendel beskrivs av

$$\begin{cases} m\ell\,\ddot{\theta}(t) = -mg\sin(\theta(t)) - c\ell\,\dot{\theta}(t), \quad t \geq 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

där c är dämpningskonstanten. Lös problemet för $\ell = 0.1$, $m = 0.1$ och $c = 0.2$ och några olika begynnelseutslagsvinklar. Använd `ode45`.

När vi gjorde figuren ovan i MATLAB skrev vi formlerna med LaTeX-kod. Så brukar matematiker skriva formler för att de skall bli snygga. Men vi får vi se det som överkurs.