

Övning 100, s. 43.

Lösning. S1. Skriv om den ursprungliga
Ekvationen i variabler $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$.

Kedjeregeln ger oss

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u + f'_v, \text{ ty } u'_x=1, v'_x=1.$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u - f'_v, \text{ ty } u'_y=1, v'_y=-1.$$

$$f'_x + f'_y = (f'_u + f'_v) + (f'_u - f'_v) = 2f'_u \Rightarrow$$

$$2f'_u = 4(x+y)f = 4uf \Rightarrow \boxed{f'_u = 2uf}.$$

Slut på S1.

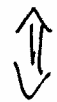
S2. Lös ekvationen $f'_u = 2uf$, dvs man måste hitta allmänna lösningen.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2uf \text{ och det är separabla variabler}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{f} = 2u \, du$$

{ Integrera och betänk att
"integrationskonstanten" är en funktion av v }

$$\ln |f| = u^2 + C(v)$$



$$|f| = e^{C(v)} \cdot e^{u^2}$$



$$f = C_1(v) \cdot e^{u^2}$$

(Här är $C_1(v) = \pm e^{C(v)}$)

Svar på S2: $f(u, v) = C_1(v) \cdot e^{u^2}$

är den allmänna lösningen till $f'_u = 2uf$ (kontrollera det). I (x, y) -koordinater (variabler) $f(x, y) = C_1(x-y) e^{(x+y)^2}$

S3. Finn f , som uppfyller $f(x, -x) = e^{2x}$.

Vi måste bestämma C_1 , som är vilken funktion som helst i en variabel (den är deriverbar).

$$f(x, -x) = C_1(x - (-x)) \cdot e^{(x+(-x))^2} = C_1(2x) \cdot e^0 = C_1(2x)$$

||
 e^{2x}

Alltså får vi: ~~$C_1(2x) = e^{2x}$~~ $C_1(2x) = e^{2x} \Rightarrow$

$$C_1(t) = e^t \Rightarrow C_1(x-y) = e^{x-y} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x, y) = e^{x-y} \cdot e^{(x+y)^2} = e^{(x+y)^2 + x - y}} \leftarrow \text{Svar på S3}$$

Det är den partikulära lösning, som ~~uppfyller~~ uppfyller villkoret (ibland kallas bivillkoret) $f(x, -x) = e^{2x}$.