

Kursmaterial "Rotationsvolumen"

1. Låt kurvan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$
rotera kring X-axeln.

Beräkna den "inneslutna" rotationsvolymen.

Svar.
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

2. Låt kurvan $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ på parameterform
rotera kring X-axeln, $a \leq t \leq b$.

Beräkna den "inneslutna" rotationsvolumen.

Svar.
$$V = \pi \int_a^b y^2(t) dx(t) = \pi \int_a^b y^2(t) \dot{x}(t) dt$$

Exempel 1.

Beräkna rotationsvolymen då kurvan $y = \sqrt{\sin x}$, $0 \leq x \leq \pi$,
roteras kring X-axeln.

Lösning.
$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin x dx = \pi (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \pi (-\cos \pi - (-\cos 0)) = 2\pi.$$

Exempel 2.

Beräkna rotationsvolymen då kurvan $\vec{r}(t) = (e^t, \sqrt{t})$,
 $0 \leq t \leq 1$, roteras kring X-axeln.

Lösning.
$$V = \pi \int_0^1 t \cdot (e^t)' dt = \pi \left(t e^t - \int_0^1 t' e^t dt \right) =$$

$$= \pi (t e^t - e^t) \Big|_0^1 = \pi ((e - e) - (0 - 1)) = \pi.$$