

Sammanfattning Föreläsning 9

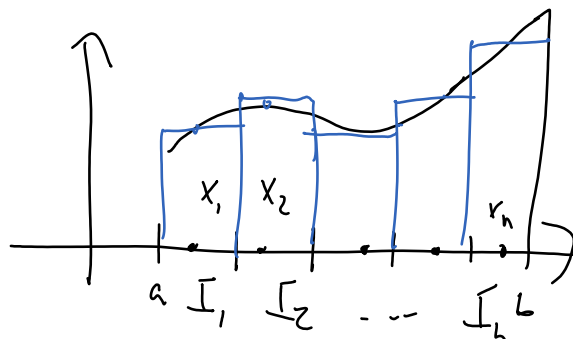
- Härledning av formeln för längd av kurvor m.h.a. Riemannsummor
- Vektorvärda funktioner $\mathbf{r}(t)$ som beskriver en partikel eller kropps rörelse, dess
 - **hastighet** $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$
 - **fart** $|\mathbf{r}'(t)|$
 - **acceleration** $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$
- Newtons andra lag, Newtons gravitationslag

Volymer och dubbelintegraler 15.1

Påminnelse: Integral av $f(x)$ = "arean under grafen $y=f(x)$ "

Definierar area genom att approximera med rektanglar, beräkna dess area och gå i gräns.

Antar delar in $[a, b]$ i n st lika stora delintervall, $I_1, \dots, I_n$ av längd $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ och tar någon punkt $x_i \in I_i$ för $i=1, \dots, n$.



(Använd x_i^* senast, här utan för att förenkla notationen)

Area:
$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = f(x_1) \Delta x + \dots + f(x_n) \Delta x.$$

Definierar arean under grafen som gränsvärdet

när $n \rightarrow \infty$, om det finns, och skriver:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Vill göra motsvarande för att def. integraler av funktioner av två variabler.

$$D \text{ rektangel i } \mathbb{R}^2 \quad D = [a, b] \times [c, d] = \\ = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

$f(x, y)$ def. på D .

Vill definiera: dubbelintegralen av f över D
som $\iint_D f(x, y) dA = \text{"volymen under grafen } z = f(x, y)\text{"}$.

Approximerar med lådor för att ge mening åt volymen:

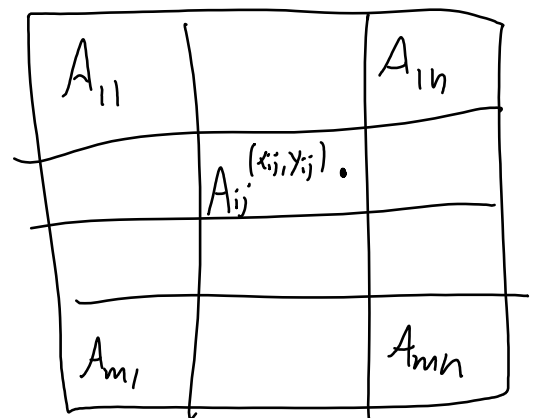
Delar in D i $m \times n$ rektanglar A_{ij} med
area $\Delta A = \left(\frac{b-a}{m}\right) \cdot \left(\frac{d-c}{n}\right)$

Tar $(x_{ij}, y_{ij}) \in A_{ij}$

Då är volymen av grafen
ungefär

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A$$

(tänk sig f konstant
värde $f(x_{ij}, y_{ij})$ på A_{ij})



$$\underline{\text{Def}} \quad \iint_D f(x,y) dA = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A$$

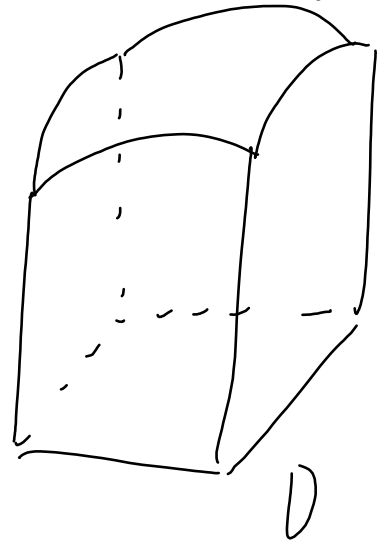
om gränsvärdet existerar.

Säger då att f är integrerbar.

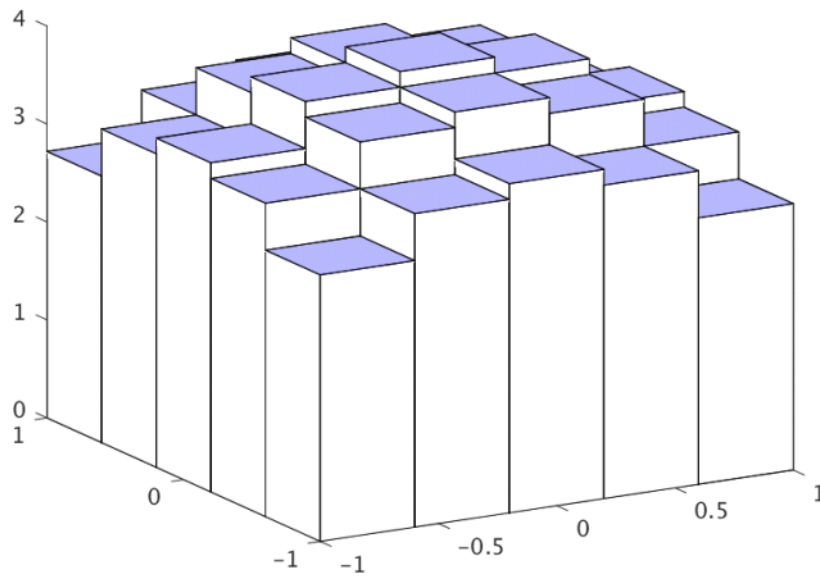
Om $f(x,y) \geq 0$ och f är integrerbar säger vi att $\iint_D f(x,y) dA$ är volymen av kroppen

mellan D och ytan $z = f(x,y)$.

$$\iint_D f(x,y) dA = \text{volym av}$$

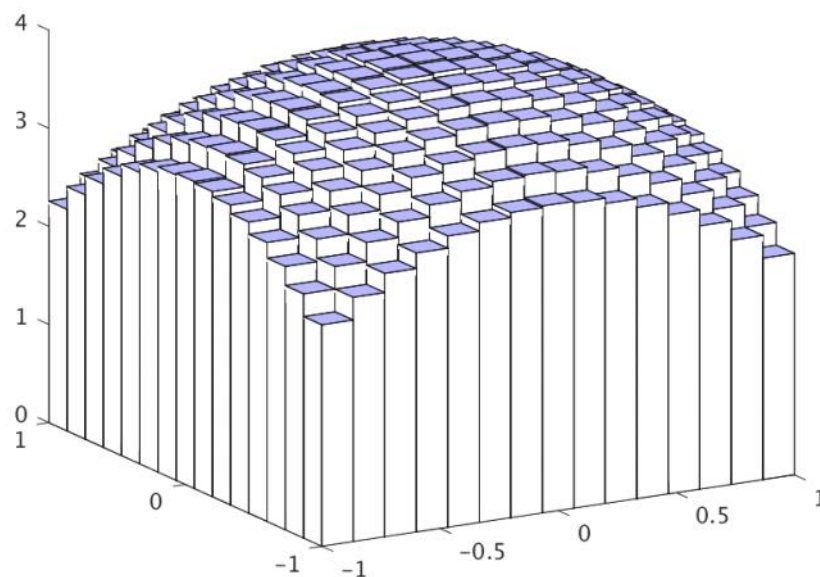


$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$



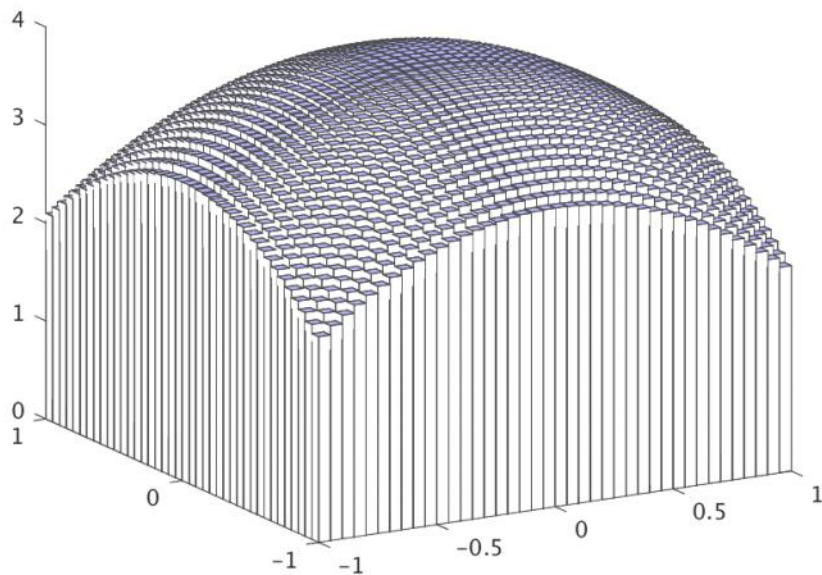
n=m=4

volym
13,4400...



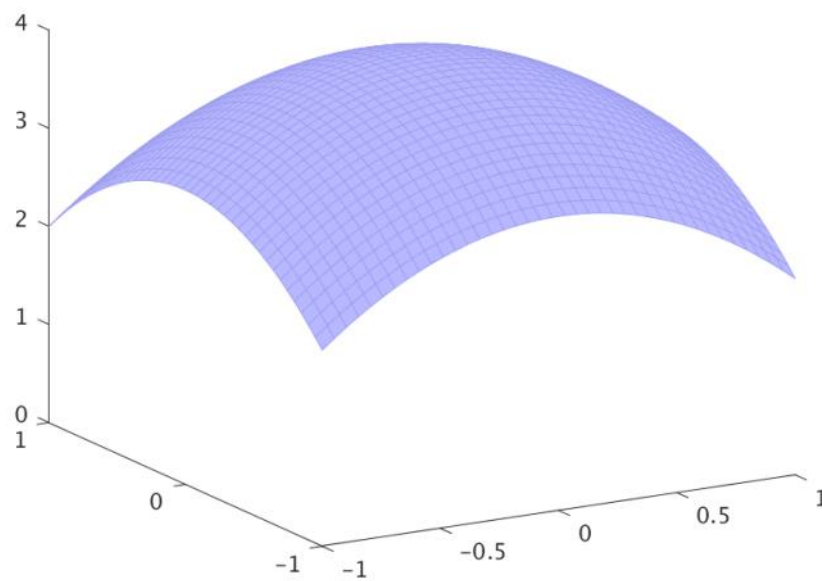
n=m=15

volym
13,3452...



$n=m=40$

volym
13,3350...



$$\iint_D f(x, y) \, dA = 13,333 \dots$$

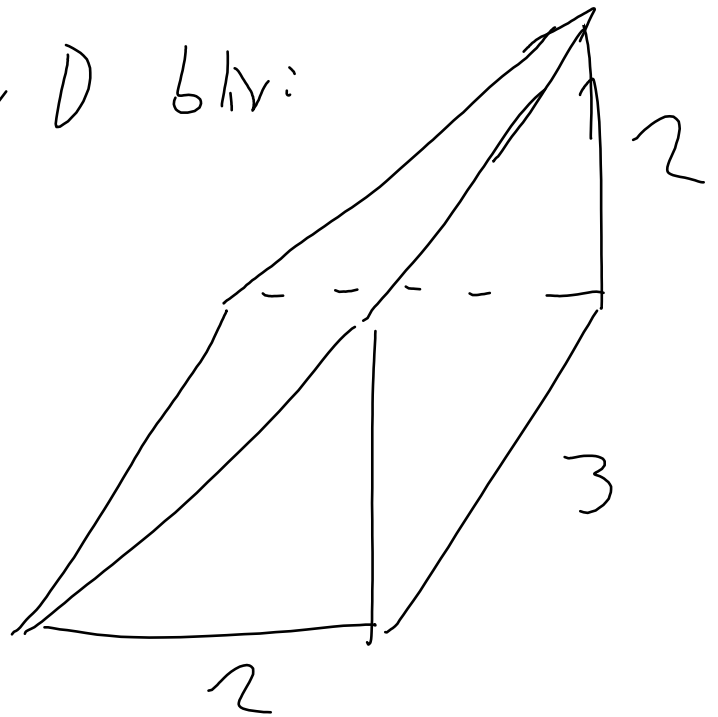
(snart hur kan
beräkna detta)

Ex Låt $D = [0, 2] \times [0, 3]$ och $f(x, y) = x$.

Tolkas $\iint_D x \, dA$ som en volym

och beräkna integralen m.h.a. det.

Gränsen $z = x$ över D blir:



Hälften av rätblock med sidor 2, 3 & 2.

Volym bör vara $2 \cdot 3 \cdot 2 / 2 = 6$.

(Sev detta på annat sätt senare)

När integrerbar?

Sats: Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på D så är den integrerbar.

Hur beräkna?

Upprepade integraler 15.2

Skriver $\int_a^b f(x,y) dx$ för integralen när ser y som fix och integrerar $g(x) = f(x,y)$ mellan a och b , och motsv. för $\int_c^d f(x,y) dy$.

Formel för att beräkna integraler:

Fubini's sats Om $f(x,y)$ kont. på rektangeln

$$D = [a,b] \times [c,d] \quad \text{så är även}$$
$$\iint_D f(x,y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy.$$

Ex Beräkna $\iint_D x dA$ där $D = [0, 2] \times [0, 3]$

Alt 1: $\iint_D x dA = \int_0^2 \left(\int_0^3 x dy \right) dx =$

$$\left(\begin{array}{l} x \text{ fix} \Rightarrow \text{om } h(y) = xy \text{ så } h'(y) = x, \text{ så} \\ \int_0^3 x dy = \left[xy \right]_{y=0}^3 = 3x - 0 = 3x \end{array} \right)$$

$$= \int_0^2 3x dx = \left[\frac{3x^2}{2} \right]_0^2 = 6.$$

Alt 2 $\iint_D x dA = \int_0^3 \left(\int_0^2 x dx \right) dy =$

$$= \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^2 dy = \int_0^3 2 dy = \left[2y \right]_0^3 = 6.$$

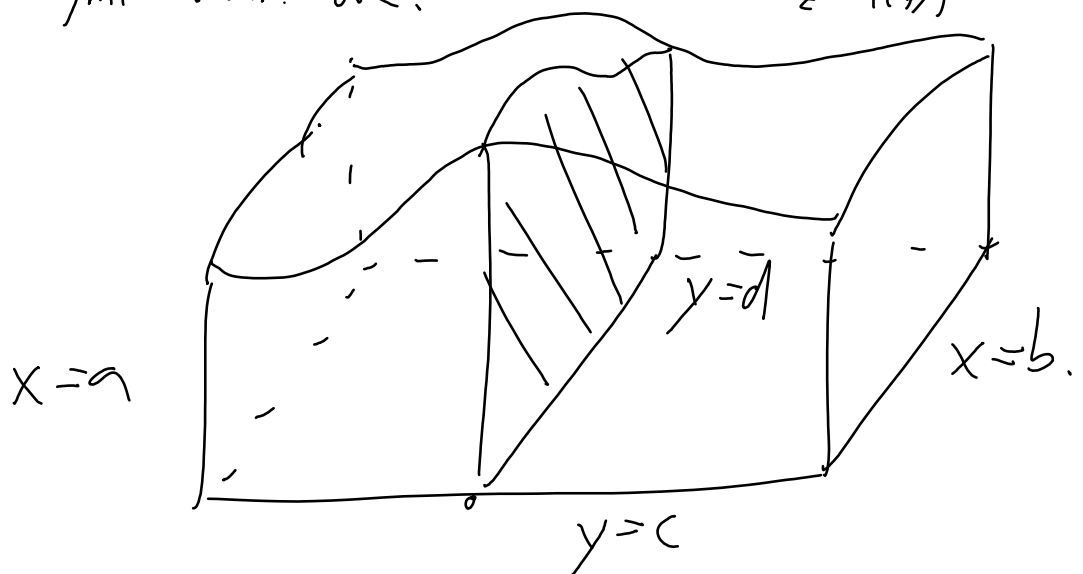
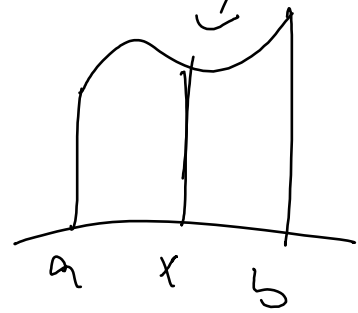
Lika, och samma som förväntat av tidigare ex.

Ide Fubini's sats

I en variabel, area = integral av höjd. $\int_a^b f(x) dx$

Bör ha motsvarande:

volym = integral av tvärsnittsarea,
jmf avsnitt 6.2.



tvärsnittsarea: $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$.

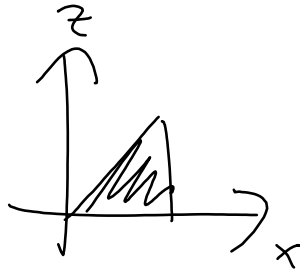
$$\begin{aligned} \text{så } \iint_D f(x, y) dA &= \text{"volym under } z=f(x, y)\text{"} = \\ &= \text{"integral av tvärsnittsarea"} = \int_a^b A(x) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Dubbelintegraler över allmänna områden, 15.3

Vad är volymen av den delen av halva cylindern

$x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$ som ligger mellan planen

$z=0$ och $z=x$?



"apelsinklyfta".

Är området under grafen till $z=x$ över området

$D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, så borde vara

$$\iint_D x \, dA,$$

men har hittills bara def. dubbelintegraler
över rektanglar. Nästa gång: mer allmänna områden D .