

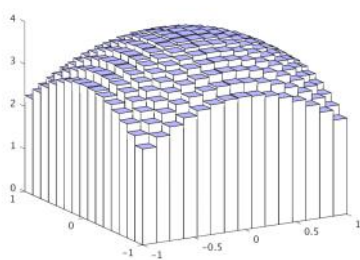
Sammanfattning Föreläsning 10

- Dubbelintegraler definierade med Riemannsummor

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta R$$

(om gränsvärdet existerar, då är f **integrerbar**)

Om $f(x, y) \geq 0$ ger integralen volymen av området mellan D och $z = f(x, y)$



Sats Om f kontinuerlig på D så är f integrerbar på D

Sats Om f kontinuerlig på $D=[a,b] \times [c,d]$ så är

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dA &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \end{aligned}$$

(Integralerna på höger sida kallas **upprepade integraler**)

- **Exempel** (*från förra föreläsningen*)

Vill beräkna volymen av området som ligger innanför halvcylindern $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ och mellan planerna $z = 0$ och $z = x$.

Bör ges av $\iint_D x \, dA$. Skall idag ge mening åt detta när D inte en rektangel.

Dubbelintegraler över allmänna områden (forts) 15.3

Hur ge mening åt $\iint_D f(x,y) dA$ för
allmänna områden $D \subseteq \mathbb{R}^2$?

Def. ar dubbelintegral över allmänna områden.

Låt $f(x,y)$ vara def. på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ begränsat område.

Låt R vara en rektangel som innehåller D och låt

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D. \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

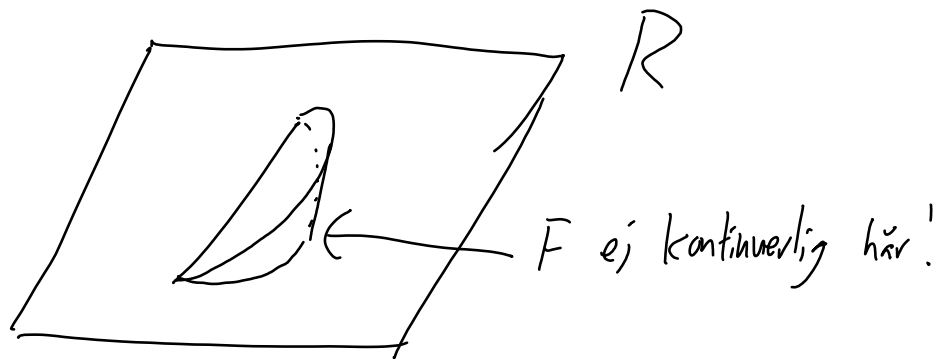
Då definierar man

$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_R F(x,y) dA.$$

Eftersom $F(x,y)=0$ utanför D bidrar den delen inte till volymen mellan grafen $z=F(x,y)$ och R och på D är $F(x,y)=f(x,y)$, så borde vara rimlig def. av integral av f över D .

F här $f(x,y)=x$ och $D=\{x^2+y^2\leq 1, x\geq 0\}$

som i ex. från förra föreläsningen:



Vilka funktioner kan man integrera?

f kont. på D $\nRightarrow$ F kont. på R
(exempel ovan)

Går bra integrera kont. funktioner på D
om D inte för konstig.

Viktiga exempel:

D är av typ 1 om den är på formen

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\},$$

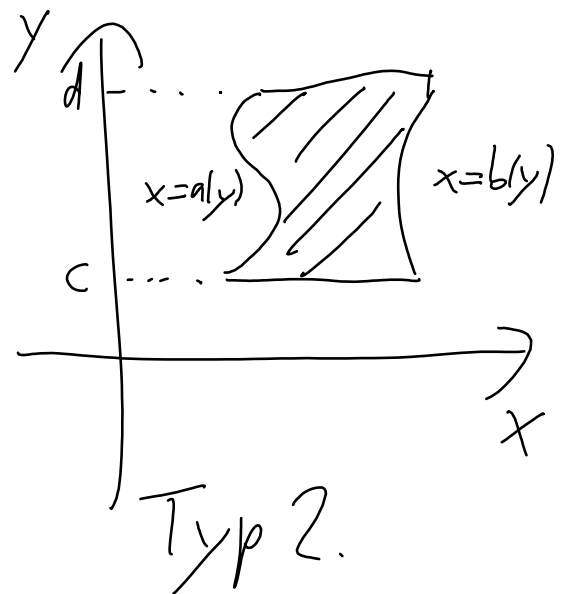
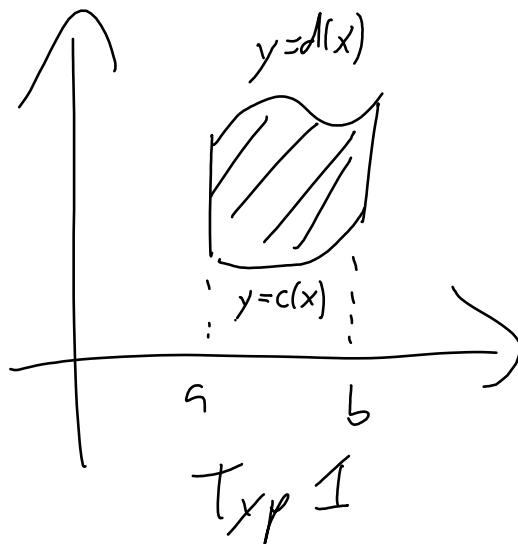
$c(x), d(x)$ kontinuerliga.

(området mellan grafen till två funktioner av x)

D är av typ 2 om den är på formen

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

$a(y), b(y)$ kontinuerliga



Dubbelintegraler över typ 1 & typ 2-områden.

Sats: Om D är ett område av typ 1 eller 2, och f är kontinuerlig på D , så är f integrerbar på D .

Om $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ (typ 1)

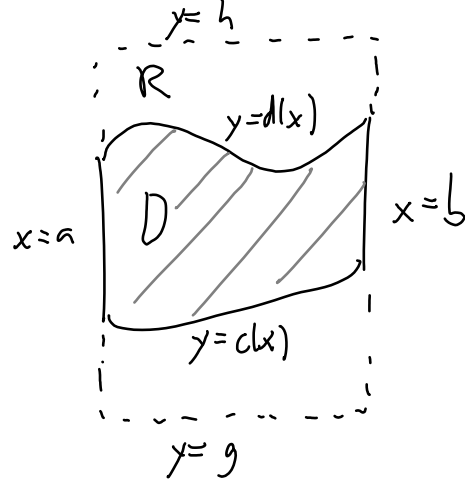
$$\text{så är } \iint_D f(x,y) dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

och om $D = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$ (typ 2)

$$\text{så är } \iint_D f(x,y) dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) dx \right) dy.$$

Härledning av formlerna:

Typ 1-område: Anta att $D \subseteq R = [a, b] \times [g, h]$
(dvs $g \leq c(x)$, $d(x) \leq h$)



$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_R F(x,y) dA = \int_a^b \left(\int_g^h F(x,y) dy \right) dx$$

(Fubini)

$$= \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = 0 \text{ när} \\ g \leq y \leq c(x) \text{ eller} \\ d(x) \leq y \leq h \end{array} \right\} = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} F(x,y) dy \right) dx =$$

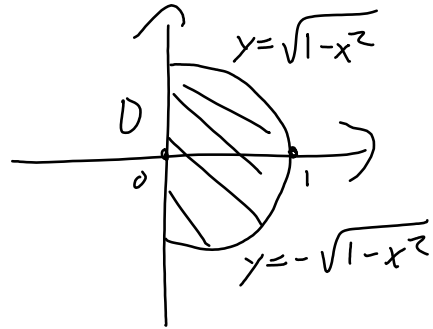
$$= \left\{ F(x,y) = f(x,y) \text{ på } D \right\} = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

Typ 2-områden analog härledning.

Ex Låt $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

Beräkna $\iint_D x \, dA$ (från förra föreläsningen)

D är ett typ I-område:



$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ så:

$$\iint_D x \, dA = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \right) dx = \int_0^1 [xy]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x \, dx \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{array} \right\} = - \int_1^0 \sqrt{t} \, dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t} \, dt = \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Kan också integrera x först, sedan y , blir enklare.

Bra övning, jämför med följande exempel.

Ibland omöjligt/svårt integrera i en ordning,
enkelt i andra.

Ex Beräkna $\int_0^{\pi/2} \left(\int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \right) dy$

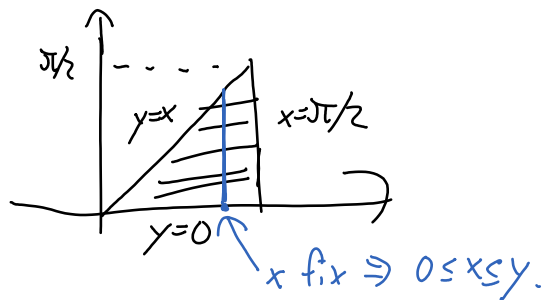
genom att tolka det som en dubbelintegral och
byt integrationsordning.

Obs: Den primitiva funktionen till $\frac{\sin x}{x}$ kan inte
uttryckas m.h.a. elementära funktioner, går därför
inte beräkna i ursprungliga ordningen.

Den upprepade integralen svarar mot dubbelintegralen
av $\frac{\sin x}{x}$ över typ 2-området

$$D = \{ (x,y) \mid 0 \leq y \leq \pi, y \leq x \leq \pi/2 \}$$

Figur:



Från figur: D är också ett typ 1-område:

$$D = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x \}$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx dy \quad \iint_D \frac{\sin x}{x} dA =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot y \right]_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0 = 1.$$

Egenskaper hos integraler:

a) A, B konstanter:

$$\iint_D A f(x,y) + B g(x,y) dA = A \iint_D f(x,y) dA + B \iint_D g(x,y) dA.$$

b) Om $f(x,y) \geq g(x,y)$ så är

$$\iint_D f(x,y) dA \geq \iint_D g(x,y) dA.$$

c) $\text{area}(D) = \iint_D \text{area}(D).$