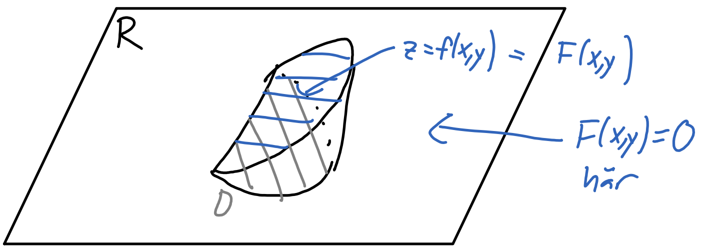
LMA017, Föreläsning 12, 22/9

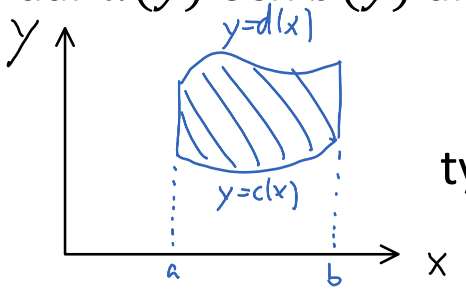
Sammanfattning Föreläsning 11

- Dubbelintegraler över allmänna områden $D \subseteq \mathbb{R}^2$
  $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_\mathrm{R} F(x,y)dA$ där R rektangel som innehåller D och $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } (x,y) \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

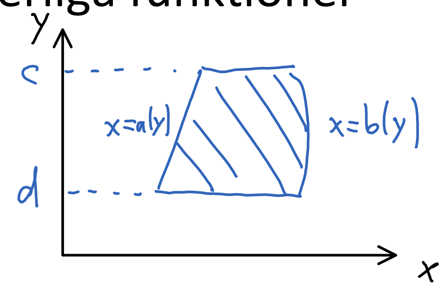


- Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är av **typ 1** om det är på formen
  $D = \{ (x,y) |\ a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}$ och
  där $c(x)$ och $d(x)$ är kontinuerliga funktioner,

- Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är av **typ 2** om det är på formen
  $D = \{ (x,y) |\ c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y) \}$ och
  där $a(y)$ och $b(y)$ är kontinuerliga funktioner



typ 1



typ 2

- **Sats** Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är av **typ 1** eller **typ 2** så är kontinuerliga funktioner på D integrerbara.

  Om $D = \{ (x, y) | \, a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}$ (typ 1) så är

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

  Om $D = \{ (x, y) | \, a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}$ (typ 2) så är

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Obs

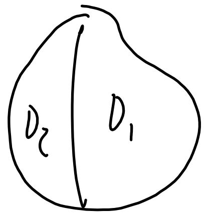
1) Dugga 2 öppen, stänger måndag 2/10, kl 18:00

2) Föreläsning på måndag 25/9, 15:15-17:00,
   ingen föreläsning på fredag 6/10

Egenskaper hos integraler (forts)

d) Om $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

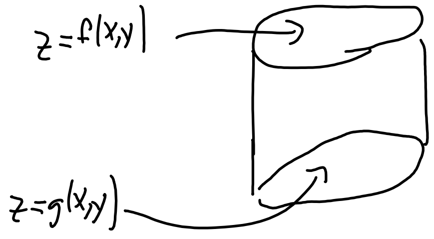
då är



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA.$$

e) Om $f(x,y) \geq g(x,y)$ så ges volymen av området mellan $z = g(x,y)$ och $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ av

$$\iint_D f(x,y) - g(x,y)\,dA.$$



Ex Beräkna arean av området mellan konen $x^2+y^2=z^2$, $z \geq 0$ och planet $z=1$.

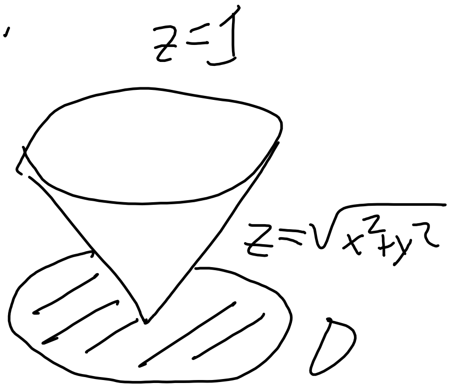
$x^2+y^2=z^2$ ger en kon, eftersom $x^2+y^2=r^2$, där $r=\sqrt{x^2+y^2}$ är avståndet till origo.

(rita grafen till $z=\sqrt{x^2+y^2}$ längs x-axeln och rotera kring z-axeln)

Området ligger mellan graferna $z=1$ och $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Skär varandra då $1=z=\sqrt{x^2+y^2}$.

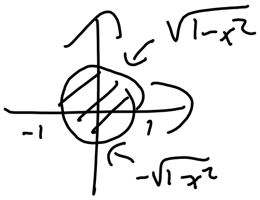
Så området ges av $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$

där $(x,y) \in D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$.



Enhetscirkelskivan D är ett typ I område:

$\left(x^2+y^2=1 \iff x=\pm\sqrt{1-x^2} \right)$



$$D=\{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

Områdets volym blir då

$$\iint_D 1-\sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1-\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx.$$

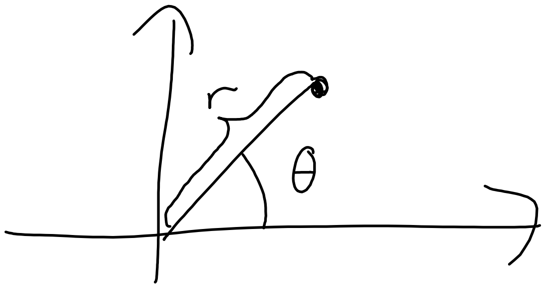
Går, men ganska krångligt, att räkna ut.

Idag: enklare sätt.

Dubbelintegraler och polära koordinater 15.4

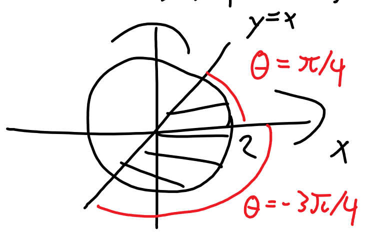
En punkt (x,y) kan beskrivas med **polära koordinater** (r,θ) genom

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



$$r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ex Området $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4,\ y \le x\}$ ges i

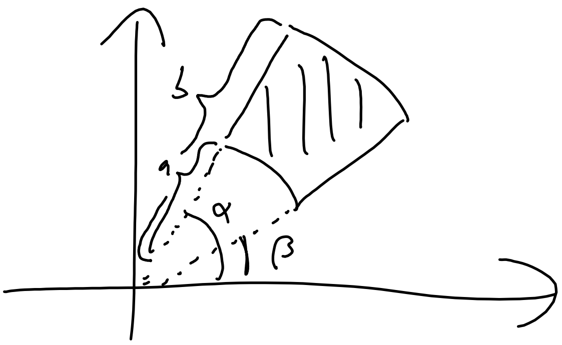


ges i polära koordinater av

$$\{(r,\theta) \mid -3\pi/4 \le \theta \le \tfrac{\pi}{4},\quad 0 \le r \le 2\}.$$

Ett område D är en polär rektangel om det ges i polära koordinater av

$$D = \{(r,\theta) \mid a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}.$$



area $\dfrac{(b^2-a^2)(\beta-\alpha)}{2}$

Integration i polära koordinater

Sats Låt D vara en polär rektangel, $a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$. Då är

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr \right) d\theta$$

$$= \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta \right) r\,dr$$

Obs: Vänsterledet: integral över allmänt område i $\mathbb{R}^2$ (15.3)

Högerledet: upprepade integraler (15.2)

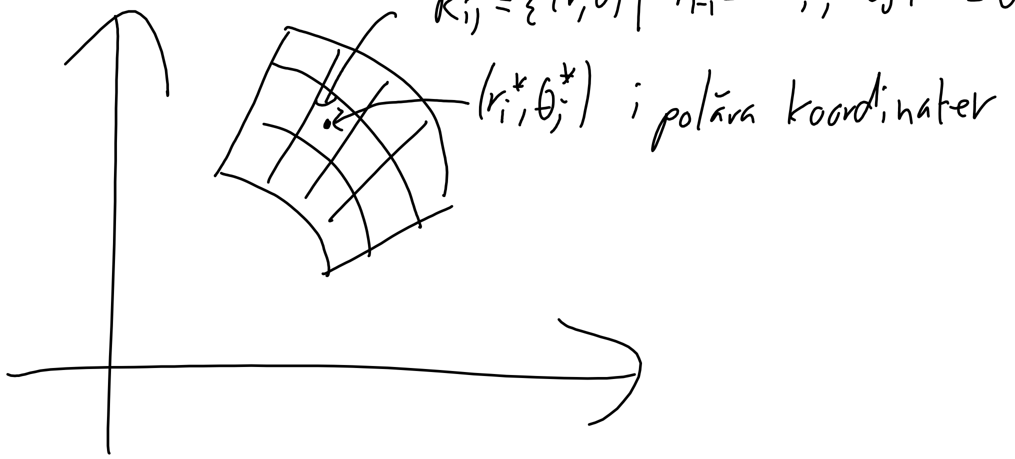
Idé Efterlikna def. av integral över rektangel, dela in i "polära delrektanglar"

Delar in $[a,b]$ i m st lika stora delintervall $[r_{i-1}, r_i]$ av längd $\Delta r = \frac{b-a}{m}$ och $[\alpha, \beta]$ i n st lika stora delintervall $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ av längd $\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}$.

Låt också $r_i^* = \dfrac{r_{i-1}+r_i}{2}$

$$\theta_j^* = \frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2}$$

$R_{ij} = \{(r,\theta) \mid r_{i-1} \le r \le r_i,\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}$.



Area av R_{ij} är $\Delta R_{ij} = \dfrac{(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1})}{2} =$

$$= \frac{r_i + r_{i-1}}{2}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) = r_i^* \Delta r \Delta\theta.$$

Integralen över R bör ges av gränsvärdet av Riemannsumman

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*)\Delta R_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta.$$

Detta är också en Riemannsumma för

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(\theta\cos r, \theta \sin r)\, r\,dr\,d\theta .$$

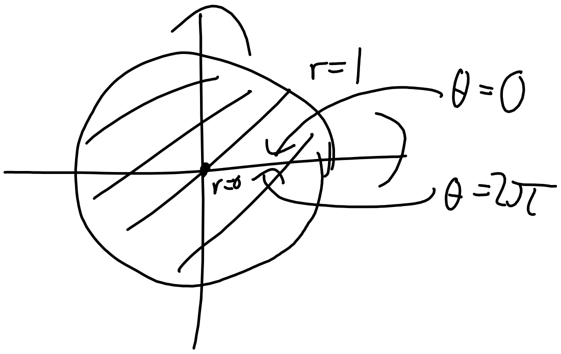
Man sammanfattar ofta formeln för integration i polära koordinater (se formelblad)

$$\boxed{\begin{gathered} dA = r\,dr\,d\theta = r\,d\theta\,dr \\ (\text{alt. } dx\,dy = r\,dr\,d\theta) \end{gathered}}$$

<u>Ex</u> Beräkna $\iint_D 1-\sqrt{x^2+y^2}\,dA$,

där $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

Detta ger volymen av konen från början av föreläsningen.



I polära koordinater ges området av

$$\{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

och $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1}} = \sqrt{r^2} = r$ $(r \geq 0)$

så $\iint_D 1-\sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)\,r\,d\theta\,dr = \int_0^1 \left[(r-r^2)\theta\right]_0^{2\pi} dr$

glöm inte!

$$= 2\pi\int_0^1 r - r^2\,dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

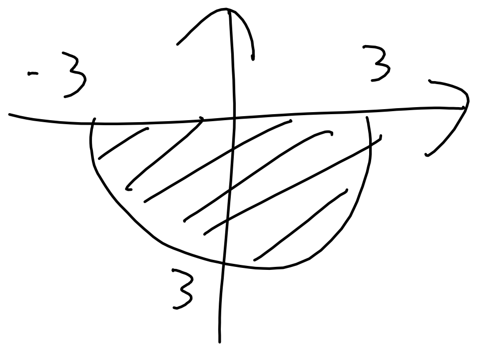
$$= \frac{\pi}{3}.$$

Ex Beräkna $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx$

genom att skriva om det som en integral i polära koordinater.

Den upprepade integralen svarar mot dubbelintegralen över typ 1-området

$$D=\{(x,y) \mid -3\le x\le 3,\ -\sqrt{9-x^2}\le y\le 0\}$$



I polära koordinater blir området

$0\le r\le 3,\quad \pi\le\theta\le 2\pi$ (alt. $-\pi\le\theta\le 0$)

så

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx = \iint_D \sin(x^2+y^2)\,dA$$

$$= \int_{0}^{3}\int_{\pi}^{2\pi} \sin(r^2)\cdot r\,d\theta\,dr = \left\{ \int_{\pi}^{2\pi} d\theta = \pi \right\} =$$

$$= \pi \int_0^3 \sin(r^2)\, r\,dr = \left\{ \begin{array}{l} s = r^2 \\ ds = 2r\,dr \\ r=0 \Rightarrow s=0 \\ r=3 \Rightarrow s=9 \end{array} \right\} = \frac{\pi}{2} \int_0^9 \sin s\, ds =$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[-\cos s \Big]_0^9 = \frac{\pi}{2} \Big(-\cos 9 - (-\cos 0) \Big) =$$

$$= \frac{\pi}{2} (1 - \cos 9).$$