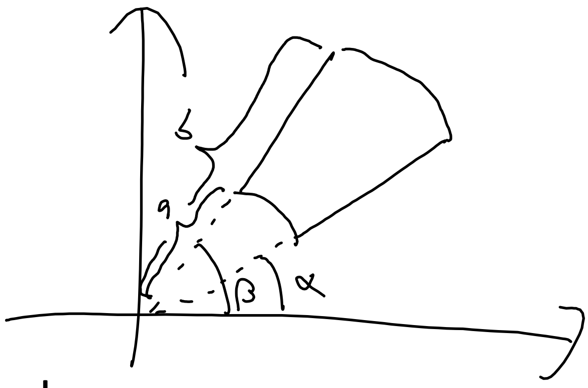
Sammanfattning Föreläsning 12

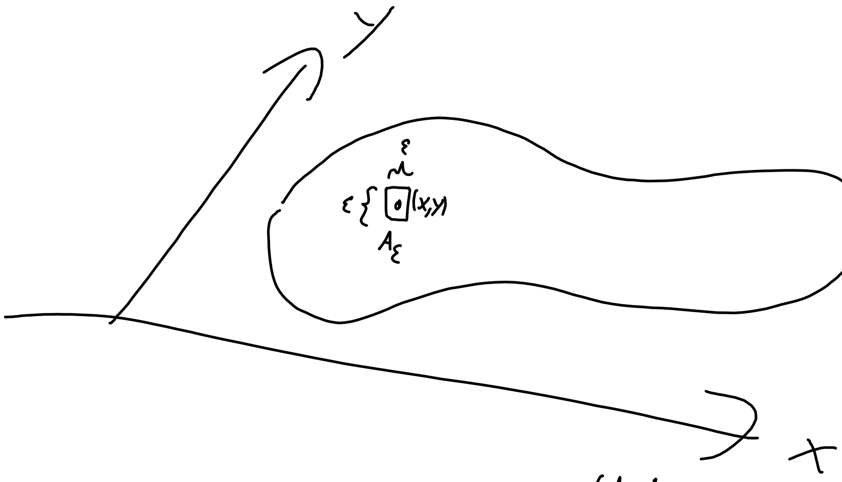


- Polära koordinater
  $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

- Integration över polär rektangel:
  D ges i polära koordinater av $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$:
  $$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta dr$$
  $$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta$$

Densitet, massa och masscentrum 15.5

Låt D vara en tunn skiva som representeras av området D i planet, med varierande massa med (kontinuerlig) densitet $\rho(x,y)$:



$$\rho(x,y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{massa}(A_\varepsilon(x,y))}{\text{area}(A_\varepsilon(x,y))}$$

där $A_\varepsilon(x,y)$ kvadrat, centrum (x,y), sidlängd ε.

"densitet = massa / areaenhet"

Om E "litet" område kring (x,y), bör ha

$$\rho(x,y) \approx \frac{\text{massa}(E)}{\text{area}(E)}$$

$$\Leftrightarrow \text{massa}(E) \approx \rho(x,y) \cdot \text{area}(E) \qquad (*)$$

Frågor: Med hjälp av $\rho(x,y)$, hur kan man beskriva

a) massan av D?

b) masscentrum av D?

Massa

Antar först D en rektangel. Delar in D i $M \cdot N$ lika stora delrektanglar R_{ij}, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, N$ med area ΔR och tar $(x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$.

Om M, N tillräckligt stora blir alla R_{ij} små, och då får vi av (*) att

$$\text{massa}(R_{ij}) \approx \rho(x_{ij}, y_{ij}) \Delta R.$$

Totala massan m av D blir då

$$m = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \text{massa}(R_{ij}) \approx \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \rho(x_{ij}, y_{ij}) \Delta R.$$

Högerledet är en Riemann summa för integralen av $\rho(x,y)$ över D, så när $M,N \to \infty$ går summan mot integralen.

Samtidigt bör uppskattningen av massan bli bättre och bättre desto större M,N är, vilket ger:

Formel för massan av skiva D i planet med densitet $\rho(x,y)$

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dA$$

Anm: I härledningen antog vi att D var rektangel. Man kan reducera till detta fallet om låter $\rho(x,y) = 0$ när (x,y) inte är i D. (som för integraler över allmänna områden)

Masscentrum

Momentet med avseende på x-axeln kring $x=a$ av en partikel med position (x,y) och massa m är

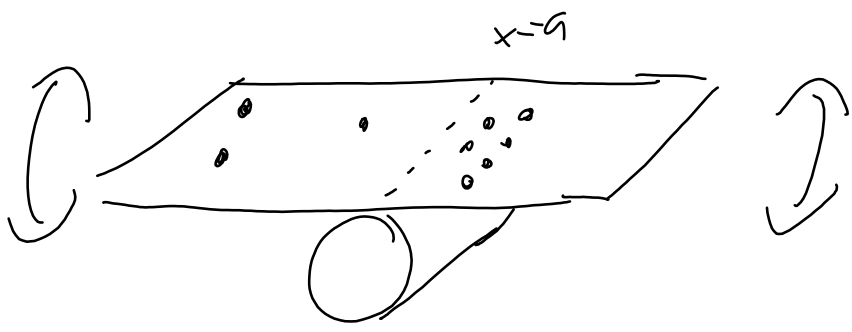
$$m(x-a).$$

En samling partiklar med positioner (x_i, y_i) och massor m_i för $i=1,\dots,n$ är i jämvikt kring $x=a$ om dess totala moment

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-a)$$

m.a.p. x-axeln kring $x=a$ är 0.

Om placerar ut partiklarna på en gungbräda som kan rotera kring linjen $x=a$ så betyder jämvikt att gungbrädan inte rör sig.



Definierar motsvarande i y-led.

Man kan härleda

på liknande sätt som för massan, om har tunn skiva D med densitet $\rho(x,y)$ så är dess totala moment m.a.p. x-axeln kring $x=a$

$$\iint_D (x-a)\rho(x,y)\,dA.$$

Får då att är i jämvikt kring $x=a$ om totala momentet är 0, dvs

$$\underbrace{\iint_D x\rho(x,y)\,dA}_{=M_x \text{ - moment m.a.p. x-axeln (kring } x=0)} - a\underbrace{\iint \rho(x,y)\,dA}_{=m} = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{M_x}{m}.$$

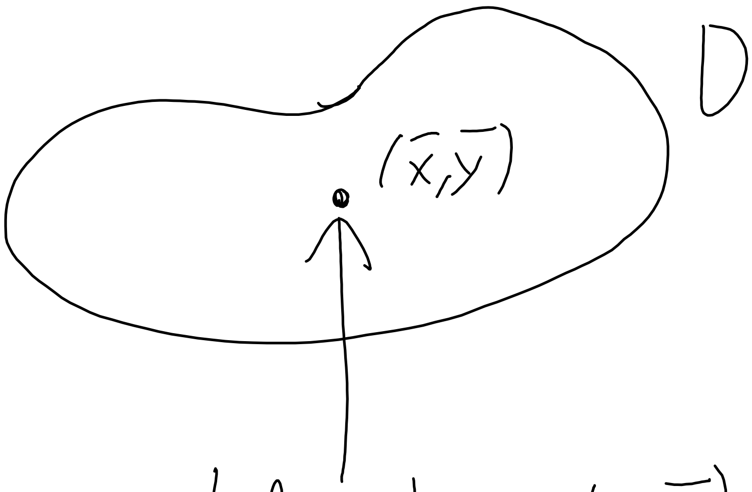
<u>Formel för masscentrum</u> $(\bar{x}, \bar{y})$

för en skiva D med densitet $\rho(x,y)$

$$\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dA$$

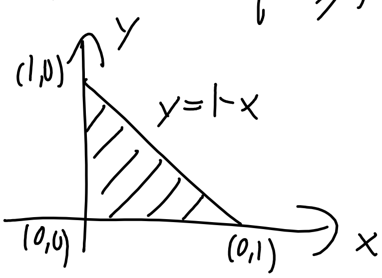
$$\bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dA,$$

där $$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA.$$



i balans kring $(\bar{x}, \bar{y})$.

<u>Ex</u> Beräkna massa och masscentrum för triangeln D med hörn i $(0,0)$, $(0,1)$ och $(1,0)$ och densitet $\rho(x,y) = 1$.



$$m = \iint_D 1 \cdot dA = \text{area}(D) = \frac{1}{2}.$$

$$M_x = \iint_D x\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} x\,dy\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx =$$

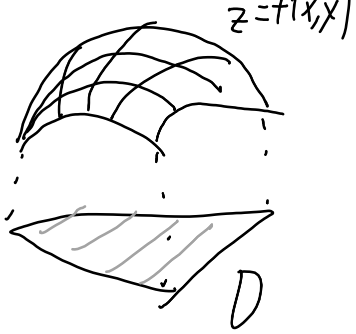
$$= \int_0^1 x - x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Av symmetriskäl, $M_y = \frac{1}{6}$, så masscentrum är $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right) = \left(\frac{1/6}{1/2}, \frac{1/6}{1/2}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Arean av grafen till en funktion 15.6

$f(x,y)$ definierad på D

Grafen $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ en yta



Area av grafen:

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dA$$

Jämför: Längden av en kurva $y=f(x)$, $a\le x\le b$ ges av liknande formel:

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Formel för mer allmänna ytor nästa vecka (och kort om idé varför formeln ser ut så)

Ex Bestäm arean av ytan $z=f(x,y)$ $(x,y)\in D$, där $f(x,y)=\frac{2}{3}(x^{3/2}+y^{3/2})$ och $D=[0,1]\times[0,1]$

$$f_x=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}= x^{1/2} \qquad f_y= y^{1/2}.$$

$$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}=\sqrt{1+(x^{1/2})^2+(y^{1/2})^2}=\sqrt{1+x+y}.$$

Så arean är:

$$\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d_x=\iint_D\sqrt{1+x+y}\;dA=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+x+y}\;dxdy=\int_0^1\left[\frac{(1+x+y)^{3/2}}{3/2}\right]_{x=0}^{x=1}dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 (2+y)^{3/2}-(1+y)^{3/2}$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{(2+y)^{5/2}-(1+y)^{5/2}}{5/2}\right]_0^1=\frac{4}{15}\left(3^{5/2}-2^{5/2}-(2^{5/2}-1^{5/2})\right)$$

$$=\frac{4}{15}\left(9\sqrt{3}-8\sqrt{2}+1\right)$$