

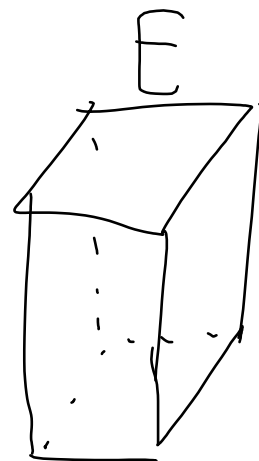
Sammanfattning Föreläsning 13

- D tunn skiva i planet, densitet $\rho(x, y)$.
 - Massa: $m = \iint_D \rho(x, y) dA$.
 - Masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$ där
 - $M_x = \iint_D x \rho(x, y) dA$ och $M_y = \iint_D y \rho(x, y) dA$
- Area av grafen $z = f(x, y), (x, y) \in D$:
 - $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$

Trippelintegraler 15.7

E lada (vätblock)

$f(x, y, z)$ funktion på E



Definier trippelintegralen av f över E

$$\iiint_E f(x, y, z) dV$$

på liknande sätt som för
dubbelintegraler genom att dela in E i mindre
lådor, bilda Riemannsummor och ta gränsvärde.

Definier sedan integralen av f på allmänt område
 $E \subseteq \mathbb{R}^3$ genom att definiera F på lada B
som innehåller E genom

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{om } (x, y, z) \in E \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\text{och } \iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B F(x, y, z) dV.$$

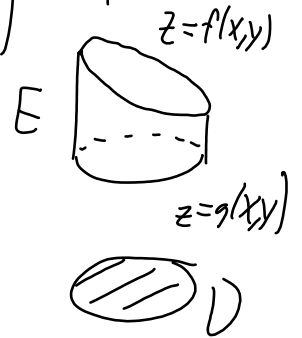
Upprepad integration i trippelintegraler:

$$\text{Om } E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, e(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$$

där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ så är

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{e(x, y)}^{f(x, y)} g(x, y, z) dz \right) dA$$

Om D är ett typ 1/2-område, tex.
 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$



och $g(x, y, z)$ kont. på E så är g integrerbar på E och

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x, y)}^{f(x, y)} g(x, y, z) dz dy dx$$

För motsvarande varianter om byter roller på variablerna, tex:

$$\text{Om } E = \{(x, y, z) \mid e \leq z \leq f, a(z) \leq x \leq b(z), c(x, z) \leq y \leq d(x, z)\}$$

så är

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_e^f \int_{a(z)}^{b(z)} \int_{c(x, z)}^{d(x, z)} g(x, y, z) dy dx dz$$

Ex Beräkna $\iiint_E z \, dV$ där

E är tetradern som begränsas av planen
 $x=0, y=0, z=0$ och $3x+2y+z=6$.

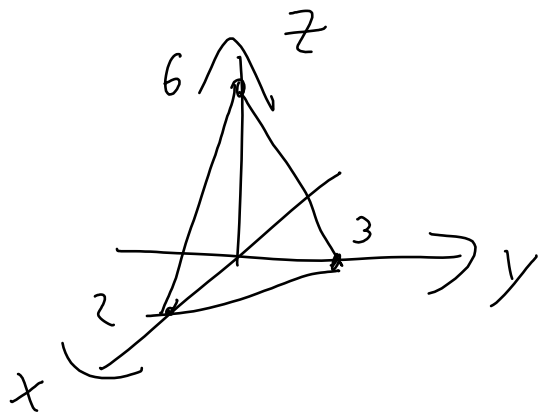
Området mellan ett antal ytor som bestäms av några likheter beskrivs oftast av motsvarande olikheter. Vilket håll på olikheterna? Rita figur.

Ett plan bestäms av 3 punkter, så kollar först var skär x , y och z -axeln:

Skär x -axeln i $(2, 0, 0)$ eftersom om $(x, y, z) = (t, 0, 0)$
 $3 \cdot t + 2 \cdot 0 + 0 = 6 \Leftrightarrow 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2$.

Skär y -axeln i $(0, 3, 0)$

Skär z -axeln i $(0, 0, 6)$



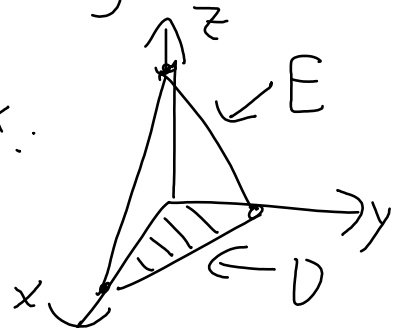
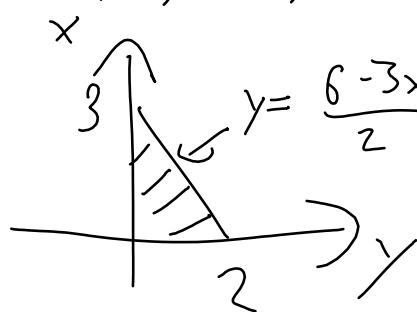
Området E blir: $\{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 3x+2y+z \leq 6\}$

(varför ≤ 6 i sista olikheten? tex. $(0, 0, 0)$ på "bätt sida")
och $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0 \leq 6$

Kan kombinera de två sista:
 $0 \leq z \leq 6 - 3x - 2y$.

För att detta skall ha någon lösning måste $(x, y) \in D$, där

$$D = \{ x \geq 0, y \geq 0, 6 - 3x - 2y \geq 0 \}$$



$$\text{För } D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \}$$

$$\text{och } E = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 6 - 3x - 2y \} = \\ = \{ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x, 0 \leq z \leq 6 - 3x - 2y \}.$$

Då blir

$$\begin{aligned} \iiint_E z dV &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3x}{2}} \int_0^{6-3x-2y} z dz dy dx = \\ &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3x}{2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=6-3x-2y} dy dx = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3x}{2}} \frac{(6-3x-2y)^2}{2} dy dx = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{(6-3x-2y)^3}{3 \cdot 2 \cdot (-2)} \right]_{y=0}^{y=3-\frac{3x}{2}} dx = \frac{1}{12} \int_0^2 (6-3x)^3 dx \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{(6-3x)^4}{4 \cdot (-3)} \right]_0^2 = \frac{6^4}{12^2} = \frac{6^2}{2^2} = 9. \end{aligned}$$

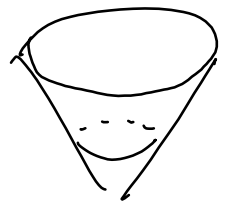
Cylindriska koordinater och trippelintegraler

Cylindriska koordinater på $\mathbb{R}^3$ får man genom att byta koordinaterna (x, y) mot polära koordinater (r, θ) .

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Ex Konen $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ ges i cylindriska koordinater av:

$$\begin{aligned} z^2 = r^2 &\Leftrightarrow z = r, \quad (r \geq 0) \\ &0 \leq z \leq 1, \\ &(0 \leq \theta < 2\pi) \end{aligned}$$



Om D är polär rektangel, $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ får man med formelerna för upprepad integration i trippelintegraler och dubbelintegraler i polära koordinater:

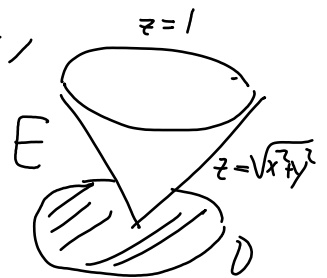
$$\iiint_D g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{c(r, \theta)}^{f(r, \theta, z)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz d\theta dr$$

Ex Beräkna $\iiint_E z \, dV$, där

E är området mellan konen

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och planet $z = 1$

Ytorna skär varandra då $\sqrt{x^2 + y^2} = z = 1$,
så om (x, y, z) ligger i området mellan ytorna
får man att $(x, y) \in D$, där $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 D ges i polära koord. av
 $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ blir
då i cylindriska koordinater

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r \leq z \leq 1.$$

$$\iiint_E z \, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 z \, r \, dz \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=r}^{z=1} d\theta \, dr = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r - r^3) d\theta \, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^1 (r - r^3) dr = \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Sfäriska koordinater och trippelintegraler 13.9

En punkt (x, y) i planet kan beskrivas i polära kood. med dess avstånd $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ till origo och en vinkel, θ , dvs vinkeln mellan (x, y) och pos. x-axeln.

En punkt (x, y, z) i rummet kan beskrivas med dess avstånd $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ till origo och två vinklar, t.ex.:

θ : vinkeln i xy-planet mellan (x, y) och pos. x-axeln
 ϕ : vinkeln mellan (x, y, z) och pos. z-axeln

(ρ, θ, ϕ) kallas sfäriska koordinater och ges av

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\z &= \rho \cos \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho &\geq 0, \\0 &\leq \phi \leq \pi \\&\left(\begin{array}{l} \text{oftast } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \text{ol. } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right)\end{aligned}$$