

Sammanfattning Föreläsning 14**Trippelintegraler**

$$\iiint_E f(x, y, z) dV$$

Beräknas typiskt som upprepade integraler.

Om t.ex. $E = \left\{ (x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d, \right. \\ \left. e(x, y) \leq z \leq f(x, y) \right\}$ så är

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x, y, z) dz dy dx.$$

Cylindriska koordinater

Byter koordinater i xy-planet:

byter (x, y) mot polära koordinater (r, θ) :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Om integrerar över $E \subseteq \mathbb{R}^3$ som i cylindriska koordinater ges av $a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, e(r, \theta) \leq z \leq f(r, \theta)$, så är

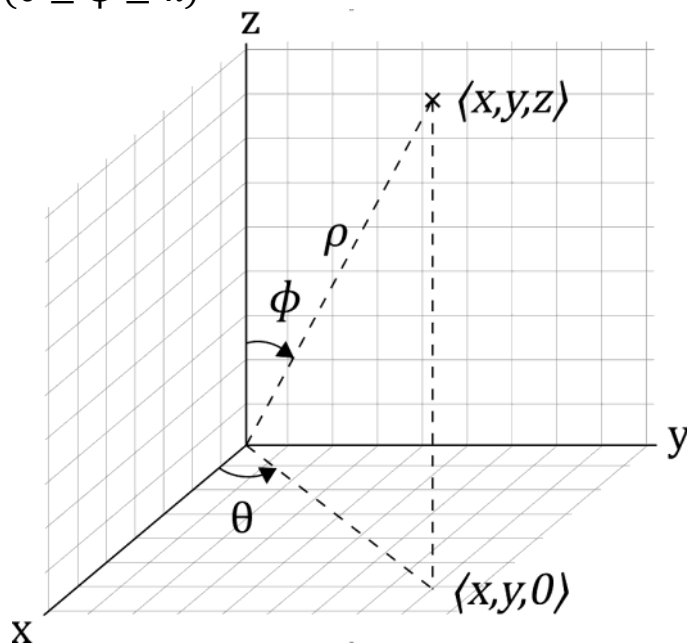
$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} \int_{e(r,\theta)}^{f(r,\theta)} g(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \textcolor{red}{r} dz d\theta dr$$

Sfäriska koordinater

ρ = avståndet till origo
($\rho \geq 0$)

θ = vinkeln mellan $\langle x, y, 0 \rangle$ och positiva x-axeln
(oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eller $-\pi \leq \theta \leq \pi$)

ϕ = vinkeln mellan $\langle x, y, z \rangle$ och positiva z-axeln
($0 \leq \phi \leq \pi$)



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Formel för sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Kommentar om trippelintegraler

E område i $\mathbb{R}^3$

$$\text{volym}(E) = \iiint_E 1 dV$$

Om E representerar en kropp med densitet $\rho(x,y,z)$ så har E

massa $m = \iiint_E \rho(x,y,z) dV$

och

masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$

där $M_x = \iiint_E x \rho(x,y,z) dV$

osv.

Sfäriska koordinater och trippelintegraler (forts) 15,9

Om man integrerar över "sfärisk låda" E :

$$a \leq \rho \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad c \leq \phi \leq d$$

så får man:

Formel för integration i sfäriske koordinater

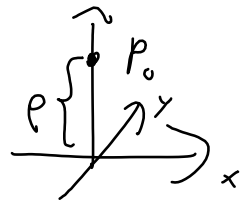
$$\iiint_E f(x, y, z) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b \int_c^d f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta$$

Kort:

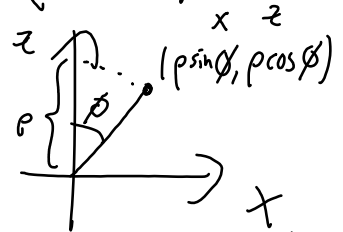
$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta$$

Härledning av sfäriska koordinater:

- 1) Börjar med $P_0 = (0, 0, \rho)$: ρ rätt, $\phi = 0$
(θ odefinierad)

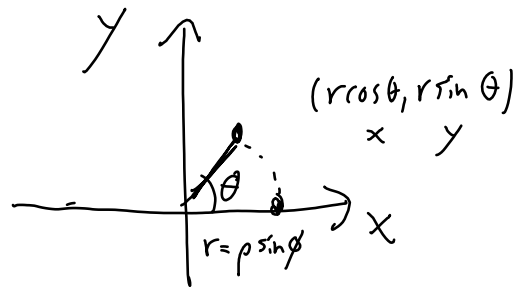


- 2) Rotation i zx -planet: $P_1 = (\rho \sin \phi, 0, \rho \cos \phi)$
 ρ, ϕ rätt, $\theta = 0$.



- 3) Rotation i xy -planet: $(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$

ρ, ϕ, θ rätt.

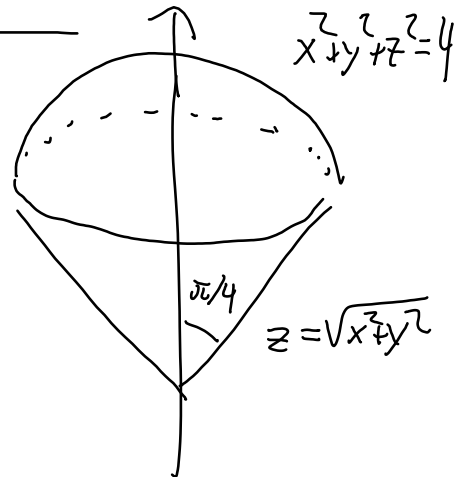


Ex Beräkna $\iiint_E x^2 + y^2 + z^2 dV$,

där E är området ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och innanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ har vinkel $\phi = \pi/4$ mot pos. z-axeln

Området ovanför konen ges då av $0 \leq \phi \leq \pi/4$.



Området innanför sfären med radie 2 ges av $0 \leq \rho \leq 2$.

Inga restriktioner i θ , så

E i sfäriska koordinater:

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/4, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$\iiint_E x^2 + y^2 + z^2 dV = \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \phi d\theta d\phi d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \rho^4 [-\cos \phi]_{\phi=0}^{\phi=\pi/4} d\phi d\rho =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) \int_0^2 \rho^4 d\rho = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^2 =$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{32}{5}.$$

Kapitel 16 Vektoranalys

Vektorfält 16.1

Har hittills studerat funktioner

a) från $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}$ (envar. och kap 14-15)

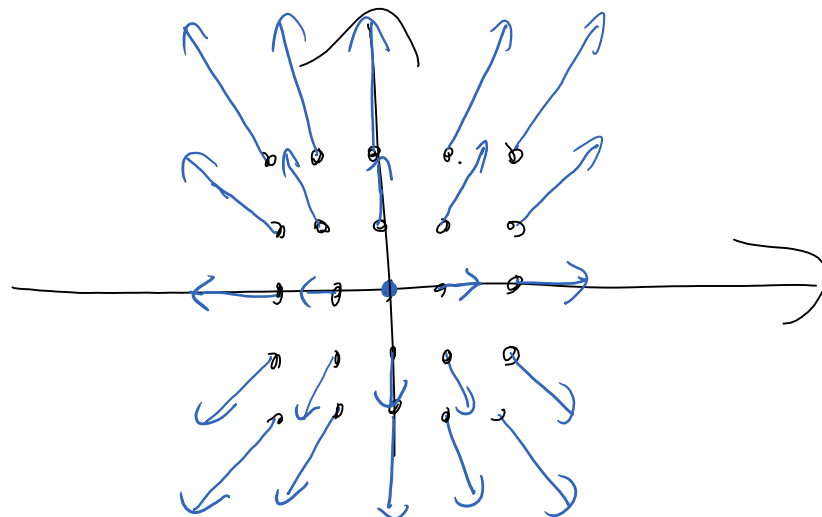
b) från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$ el. $\mathbb{R}^3$, dvs parametriserande kurvor. (kap 13)

Nästa naturliga funktioner att studera:

Def Ett vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en funktion $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, dvs för varje $(x,y) \in D$ ger det vektor $F(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Definierar vektorfält på $\mathbb{R}^3$ på motsvarande sätt.

Ex Skissa vektorfältet $F(x,y) = \langle \frac{1}{2}x, y \rangle$ genom att rita ut det i ett antal jämnt placerade punkter.



En viktig användning av vektorfält är att beskriva fysikaliska fenomen. T.ex.:

Ex a) Ett hastighetsvektorfält $\mathbf{v}$ är ett vektorfält där $\mathbf{v}(x,y)$ representerar hastigheten av i (x,y) av något som rör sig, b.ex. vindhastighet eller hastighet av rörelse i en vätska.

b) Ett kraftvektorfält $\mathbf{F}$ är ett vektorfält där $\mathbf{F}(x,y)$ representerar en kraft på en partikel med position (x,y) b.ex. gravitationsfält eller elektriska fält.

Ett viktigt matematiskt exempel:

Def f reellvärd funktion på $0 \leq \mathbb{R}^2$ så är dess gradientfält

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) \quad (0 \leq \mathbb{R}^2)$$

Kurvintegraler av funktioner 16.2

(Intressant i sig, men också för att nästa gång definiera integraler av vektorfält längs kurvor)

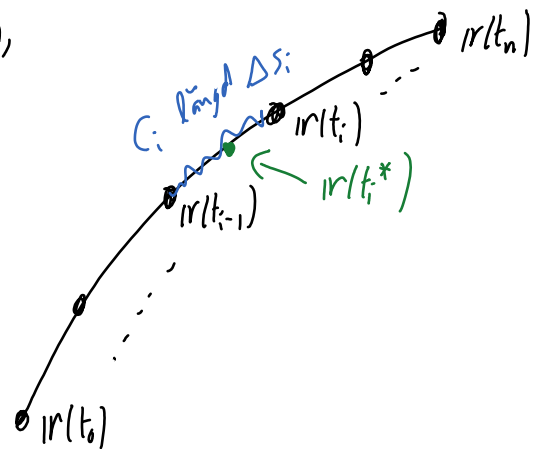
C kurva, parametriserad av $r(t)$, $a \leq t \leq b$,

$f(x,y)$ funktion med def. mängd $D \supseteq C$.

Vill def. integral av f längs C ,
gör som tidigare m.h.a. Riemannsummor.

Antar $r(t)$ glatt (smooth), dvs $r'(t)$ existerar
och är kont.

Delar in C i n st delar, $C_1, \dots, C_n$,
där C_i är delen av C mellan
 $r(t_{i-1})$ och $r(t_i)$ som har
längd Δs_i och tar t_i^* s.a.
 $t_{i-1} \leq t_i^* \leq t_i$.



Def Kurvintegralen av f längs C definieras
som

$$\int_C f(x,y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(r(t_i^*)) \Delta s_i$$

om gränsvärdet existerar.

Längden l av C är $\sum_{i=1}^n \Delta s_i$

(dvs $f(x,y) = 1$) och härledde tidigare att

$$l = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Liknande härledning ger:

Formel för kurvintegral av f om f kontinuerlig:

$$\int_C f(x,y) ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$$

ds kallas längdelement, och formeln ovan

förkortas ofta:

$ds = |r'(t)| dt$ (formelblad)

Anm En (parametriserad) kurva C ges av

$$C = \{r(t) \mid a \leq t \leq b\}$$

vilket är en mängd punkter i $\mathbb{R}^2$ el. $\mathbb{R}^3$.

En parametrisering av C ges av funktionen $r(t)$ som ger en formel för vilket värde på t som ger vilken punkt på C .

Samma kurva C kan ha olika parametriseringar, dvs beskrivas med olika formler.

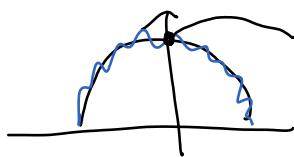
Ex Den övre halvan C av enhetscirkeln kan parametriseras av:

a) $r_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq \pi$

b) $r_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad -1 \leq t \leq 1$

c) $r_3(t) = (3t, \sqrt{1-(3t)^2}) \quad 0 \leq t \leq 1/3$

OSV.



$$(0,1) = \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{=r_1(\pi/2)} = \underbrace{(0, \sqrt{1-0^2})}_{=r_2(0)}$$

Formeln för en kurvintegral är uttryckt i termer av en parametrisering $r(t)$, men värdet beror bara på C . Kan därför välja själv lämplig parametrisering.
