

Sammanfattning Föreläsning 14

Trippelintegraler $\iiint_E f(x, y, z) dV$

Beräknas typiskt som upprepade integraler.

Om t.ex. $E = \left\{ (x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), \right. \\ \left. e(x, y) \leq z \leq f(x, y) \right\}$ så

är

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} g(x, y, z) dz dy dx .$$

Cylindriska koordinater

Byter koordinater i xy-planet:
byter (x, y) mot polära
koordinater (r, θ) :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Om integrerar över $D \subseteq \mathbb{R}^3$ som i cylindriska koordinater ges av $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $e(r, \theta) \leq z \leq f(r, \theta)$, så är

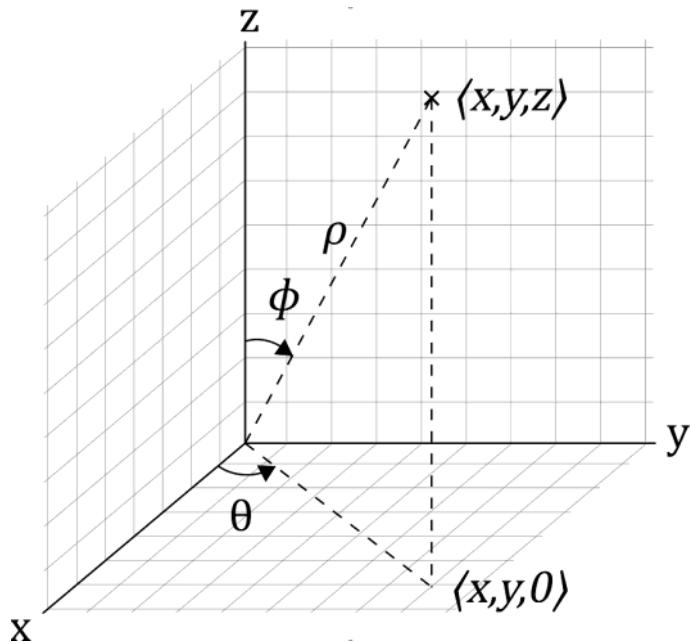
$$\iiint_D g(x, y, z) dV = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_{e(r, \theta)}^{f(r, \theta)} g(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dz \, d\theta \, dr$$

Sfäriska koordinater

ρ = avståndet till origo
($\rho \geq 0$)

θ = vinkeln mellan $\langle x, y, 0 \rangle$
och positiva x-axeln
(oftast $0 \leq \theta \leq 2\pi$ eller $-\pi \leq \theta \leq \pi$)

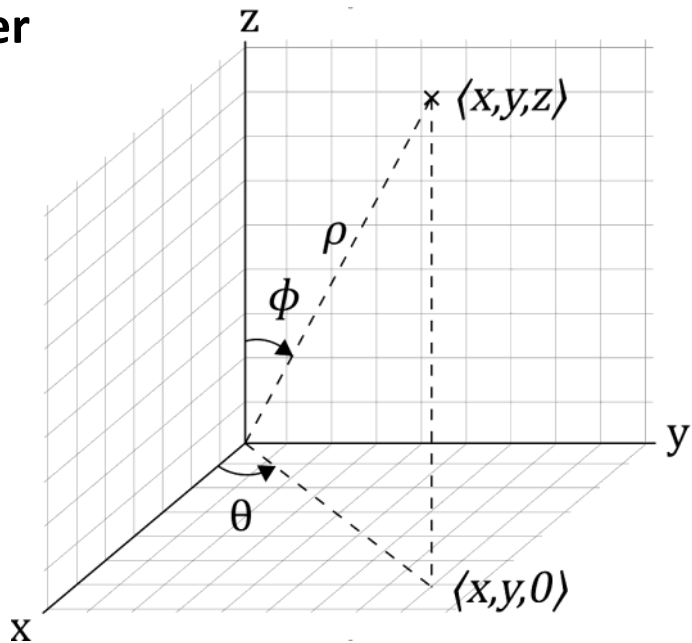
ϕ = vinkeln mellan $\langle x, y, z \rangle$
och positiva z-axeln
($0 \leq \phi \leq \pi$)



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Formel för sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons