LMA017, Föreläsning 16, 28/9

Sammanfattning Föreläsning 15

Integration i sfäriska koordinater

E *"sfärisk låda"*: $a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d$

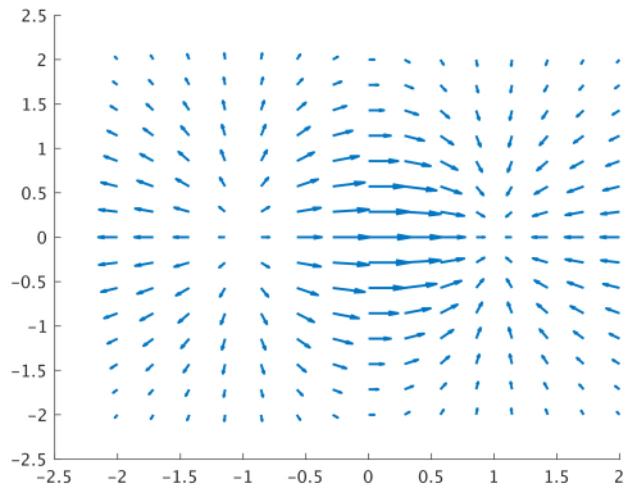
$$\iiint_E g(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_\alpha^\beta g(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi)\, \rho^2 \sin\phi \;\, d\theta d\phi d\rho \,.$$

$$\text{Kortare: } dV = \rho^2 \sin\phi \, d\theta d\phi d\rho \;\text{ och } \begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

Vektorfält

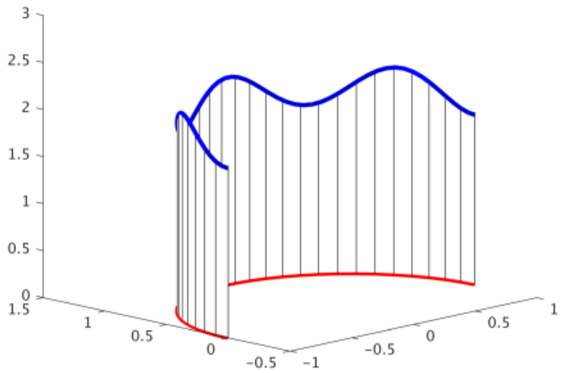
Funktioner $\mathbf{F}$ från $D \subseteq \mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$:
För varje $(x,y) \in D$ får man
en vektor $\mathbf{F}(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(eller motsvarande i $\mathbb{R}^3$)



Kurvintegral av funktioner:
C kurva, $f(x, y)$ reellvärd funktion

$\int_C f(x,y)ds$ är *"arean av ytan mellan* C *(*undre*)*
och grafen $z = f(x,y)$ *längs C (övre)"*



Formel för kurvintegral: C kurva
parametriserad av $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \big(x(t), y(t)\big)$,
$a \leq t \leq b$, $f(x, y)$ kontinuerlig funktion

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(\mathrm{t}))|\mathbf{r}'(\mathrm{t})|\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

Kurvintegraler av funktioner (forts.) 16.2

På liknande sätt som tidigare kan man härleda:

Om en tunn tråd med densitet $\rho(x,y)$ går längs kurva C är dess

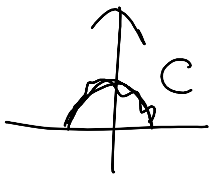
<u>massa</u>: $m = \int_C \rho(x,y)\,ds$

<u>masscentrum</u>: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$ där

$M_x = \int_C x\rho(x,y)\,ds$ och

$M_y = \int_C y\rho(x,y)\,ds.$

Ex Beräkna massan och masscentrum av en tråd längs övre halvan av enhetscirkeln med konstant densitet 1.



C kan parametriseras med $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $0 \le t \le \pi$.

$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$,

Massan är $m = \int_C 1\,ds = \int_0^\pi 1 \cdot |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^\pi 1\,dt = \pi$.

$$M_x = \int_C x\,ds = \int_0^\pi \cos t\,dt = \left[\sin t\right]_0^\pi = 0.$$

$$M_y = \int_C y\,ds = \int_0^\pi \sin t\,dt = \left[-\cos t\right]_0^\pi = 2.$$

Masscentrum är $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right) = \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$.

(Rimligt av symmetriskäl: $\bar{x} = 0$)

Kurvintegraler av vektorfält 16.2

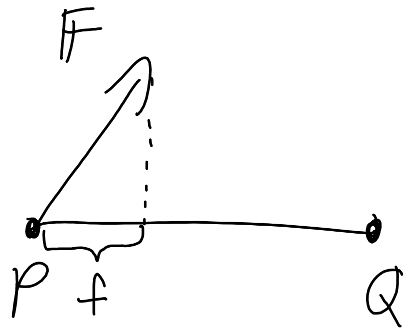
(Motiveras av arbete i fysik)

I en variabel: arbetet utfört av en konstant kraft $\mathbb{F}$ på en partikel som förflyttar sig sträckan d är $F \cdot d$

(kan vara pos. eller neg.)

I flera variabler, om har kraft $\mathbb{F}$ som verkar på partikel som förflyttas från P till Q blir arbetet

$$\mathbb{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$$



$$\text{arbete} = f \cdot |\overrightarrow{PQ}| = \mathbb{F} \cdot \overrightarrow{PQ},$$

se avsn 12.3, s. 805.

(Arbetet beror bara på delen av $\mathbb{F}$ som pekar i riktningen av $\overrightarrow{PQ}$)

Om har kraftfält $\mathbb{F}(x)$ som varierar, vill att kurvintegralen av $\mathbb{F}$ längs C ger arbetet som kraftfältet utför på en partikel som rör sig längs C.

Kan härleda m.h.a. Riemannsummor att arbetet blir

$$W = \int_C \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot T(\mathbb{r}(t))\, ds,$$

där $T(\mathbb{r}(t)) = \dfrac{\mathbb{r}'(t)}{|\mathbb{r}'(t)|}$ är den normaliserade tangentvektorn av $\mathbb{r}(t)$.

se s. 1070. Enligt formeln för kurvintegraler av funktioner är detta lika med

$$\int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \frac{\mathbb{r}'(t)}{\cancel{|\mathbb{r}'(t)|}} \cancel{|\mathbb{r}'(t)|}\, dt$$

<u>Definition av kurvintegral av ett vektorfält</u> $\mathbb{F}$ längs kurva C som parametriseras av $\mathbb{r}(t)$:

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_C \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot d\mathbb{r}(t) = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t)\, dt.$$

<u>Kort:</u> $\boxed{d\mathbb{r}(t) = \mathbb{r}'(t)\, dt}$

Ex Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet $\mathbb{F}(x,y) = \langle y, x\rangle$ om en partikel förflyttas längs kurvan C som ges av

$$\mathbb{r}(t) = (t^2, t^3), \quad 1 \le t \le 2.$$

Arbetet $W = \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) = \langle t^3, t^2\rangle \qquad \mathbb{r}'(t) = (2t, 3t^2)$$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t) = t^3 \cdot 2t + t^2 \cdot 3t^2 = 5t^4.$$

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_1^2 \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t)\,dt = \int_1^2 5t^4\,dt =$$

$$= \left[t^5\right]_1^2 = 2^5 - 1 = 31.$$

Huvudsatsen för kurvintegraler 16.3

Enkelt integrera gradientfält.

<u>Sats</u> Antag C glatt kurva, ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$,
$f(x,y)$ s.a. ∇f kont. längs C.
Då är

$$\int_C \nabla f \bullet d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Om $\mathbf{r}(t) = (t,0)$, och f bara beror på x
blir detta integralkalkylens huvudsats:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Det allmänna fallet följer av detta och kedjeregeln,
se s. 1076.

<u>Def</u> Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är <u>konservativt</u> om
$\mathbf{F} = \nabla f$ för någon funktion f.

f kallas då <u>potential</u> till $\mathbf{F}$.

Ex Bevarande av mekanisk energi

Om en partikel rör sig enligt Newtons andra lag,

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) = m\mathbb{r}''(t)$$

är arbetet utfört av $\mathbb{F}$ lika med skillnaden i rörelseenergi, se s. 1081.

Om $\mathbb{F}$ är konservativt, vilket t.ex. gravitationsfält typiskt är (se s. 1061) och P är den potentiella energin, så är $-P$ en potential till $\mathbb{F}$, dvs

$$\mathbb{F} = -\nabla P,$$

Enligt huvudsatsen blir då arbetet också skillnaden i potentiell energi.

Kombinerar man dessa tolkningar av arbete får man att totala mekaniska energin (rörelseenergi + potentiell energi) bevaras i konservativa kraftfält:

$$K(\mathbb{r}(b)) - K(\mathbb{r}(a)) = W = -P(\mathbb{r}(b)) - (-P(\mathbb{r}(a)))$$

$$\Rightarrow \boxed{K(\mathbb{r}(a)) + P(\mathbb{r}(a)) = K(\mathbb{r}(b)) + P(\mathbb{r}(b))}$$

Konservativa vektorfält enkla att integrera.
Hur avgöra om ett v.f. konservativt?

Om $\mathbb{F} = (P, Q) = \nabla f = (f_x, f_y)$ och ∇f kont,
så är

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(Clairaut's sats)

Så måste ha $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ om konservativt.

Skall se räcker för att avgöra (ibland).

Behöver först:

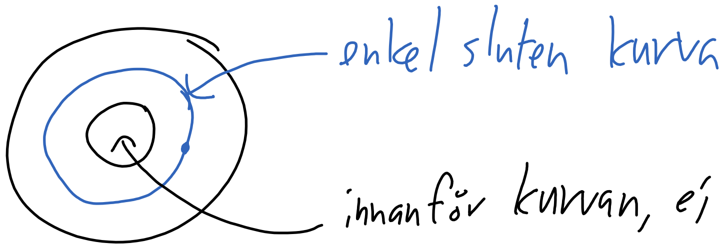
Def En enkel sluten (simple closed) kurva börjar och slutar i samma punkt (sluten) och korsar aldrig sig själv (enkel).

Def En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhängande om den "inte innehåller några hål".
Mer precist: För varje enkel sluten kurva C i D så ligger alla punkter innanför C också i D.

Ex a) $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ enkelt sammanhängande.

"minus"

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ inte enkelt sammanhängande.



Sats Om $\mathbb{F} = (P, Q)$ ett vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D enkelt sammanhängande och $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ på D, då är $\mathbb{F}$ konservativt.