

Sammanfattning Föreläsning 16

- Om har tunn tråd längs kurva C med densitet $\rho(x, y)$, så är dess

- **massa** $m = \int_C \rho(x, y) ds$

- **masscentrum** $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$ där

$$M_x = \int_C x \rho(x, y) ds \text{ och } M_y = \int_C y \rho(x, y) ds$$

- **Kurvintegral av vektorfält $\mathbf{F}$ längs kurva C**
som ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

(Kort: $d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)dt$)

Om $\mathbf{F}$ kraftfält ger kurvintegralen *arbetet* som kraftfältet utför på en partikel som rör sig längs C .

- **Huvudsatsen för kurvintegraler:** Om C ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ så är

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

- Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är **konservativt** om $\mathbf{F} = \nabla f$, dvs det är gradienten av en funktionen f .

- Om $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ är konservativt så är

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

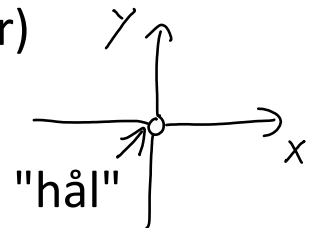
- Ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är **enkelt sammanhängande** om den "inte innehåller några hål".

(Mer precist uttryckt m.h.a. enkla slutna kurvor)

Exempel:

$\mathbb{R}^2$ enkelt sammanhängande

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ej enkelt sammanhängande



- **Sats** Om $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ är ett vektorfält på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är enkelt sammanhängande och $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ så är $\mathbf{F}$ konservativt på D , dvs $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon funktion f .

(Tidigare, såg att ekvationen *måste* vara uppfylld för att skall vara konservativt, denna satsen säger att det *räcker*)

Metod för att hitta potential om existerar:

$$\text{Vill lösa } \begin{cases} f_x = P & (i) \\ f_y = Q & (ii) \end{cases}$$

1) Tar först en lösning till (i), dvs primitiv funktion f_0 till P m.a.p. x . Allmänna lösningen till (i) är då
$$f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) \quad (*)$$

($g(y)$ oberoende av x)

2) Sätter in (*) i (ii) för att bestämma g :

$$(f_0)_y + g'(y) = Q \Rightarrow$$

g primitiv funktion till $Q - (f_0)_y$ m.a.p. y .

Ex Avgör vilken av vektorfälten $F = (2x+y, x-2y)$

och $G = (2x-y, x-2y)$ som är konservativa
och bestäm i så fall potential till dem.

$\mathbb{R}^2$ enkelt sammanhängande, så $\langle P, Q \rangle$ konservativt

precis när $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$F = (P, Q)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, lika, så F är konservativt.

$G = (R, S)$, $\frac{\partial R}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial S}{\partial x} = 1$, olika, så G ej konservativt.

Potential till F : a) Primitiv funktion till P m.a.p. x :

$$f_0 = \int 2x+y dx = x^2 + xy.$$

Allmän lösning till (i):

$$f(x, y) = x^2 + xy + g(y).$$

b) $f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + g(y)) = x + g'(y) = Q = x - 2y$

$$\Rightarrow g'(y) = x - 2y - x \Rightarrow g(y) = -y^2 + C$$

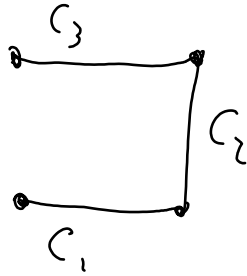
$$f = x^2 + xy - y^2 + C \text{ potential till } F.$$

Obs Satsen gäller inte om D inte enkelt
sammanhängande, som $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,
se t.ex. övning 35; 16.3

Greens sats 16.4

Förberedelse:

- 1) Kommer anta C styckvis glatt, dvs C kan delas upp i glatta kurvor $C_1, \dots, C_m$ där C_i slutar där C_{i+1} börjar



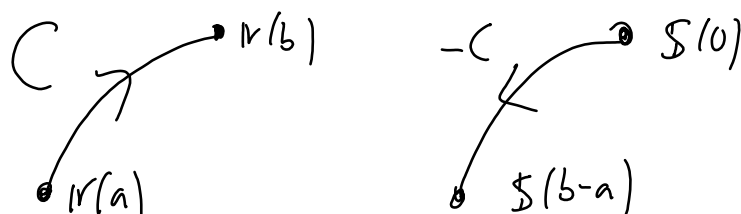
Då definierar man $\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \dots + \int_{C_m} f ds$

och $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

- 2) För kurvintegraler av vektorfält längs kurva C som ges av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, ser man C som en orienterad kurva som bestäms av dess punkter $\{\mathbf{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$ och en riktning.

Kurvan $-C$ består av samma punkter, men går i motsatt riktning och kan tex. parametrizeras med

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(b-t), \quad 0 \leq t \leq b-a.$$



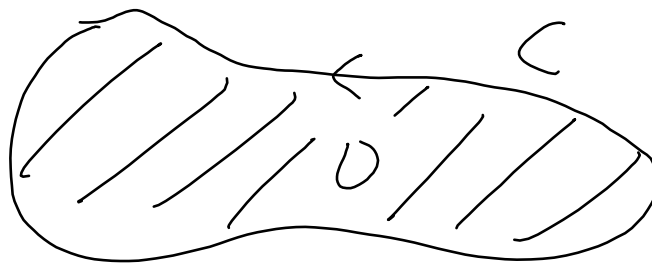
Från def. av kurvintegral av vektorfält följer att

$$\int_{-C} F \cdot dr = - \int_C F \cdot dr$$

$$\left(\text{Däremot: } \int_C f ds = \int_{-C} f ds \text{ (samma tecken).} \right)$$

Låt C vara en enkel sluten kurva C (som alltså börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv)

Om begränsar C ett område D ,
dvs C är anden till D .



C är positivt orienterad om den går moturs kring D ,
dvs D ligger hela tiden till vänster om man följer C i
positiv riktning.

Annars är C negativt orienterad, och då är $-C$
positivt orienterad.

Notation Kurva C : ges av $r(t)$, $a \leq t \leq b$

Låt $F = (P, Q)$ och $r(t) = (x(t), y(t))$. Då skrivs

$$\text{kurvintegralen } \int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

också som

$$\int_C P dx + Q dy = \int_a^b (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt,$$

$$\text{dvs: } \boxed{dx = x'(t) dt \text{ och } dy = y'(t) dt}$$

Greens formel/sats Om C enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D , och P, Q har kont. partiella derivator så är

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

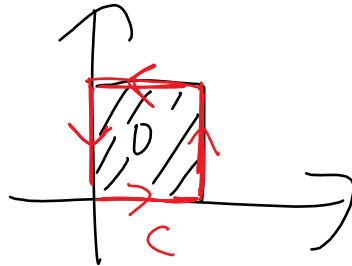
Liknar integralkalkylens huvudsats $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$:

Integral av derivata på område kan uttryckas m.h.a. värden på randen.

Beviset av Green's formel när D ett typ 1 eller 2 område följer ganska enkelt från integralkalkylens huvudsats och formeln för upprepad integration, se s. 1085.

Ex Beräkna $\int_C (yx^2 - e^{x^2}) dx + (e^{y^2} + x^3) dy$,

där C är den positivt orienterade randen till kvadraten $D = [0, 1] \times [0, 1]$



$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (3x^2 - x^2) dA = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2x^2 dx dy = \int_0^1 \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{2}{3} dy = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Kan som ovan beräkna kurvintegraler som dubbelintegraler. Bland annat göra tricken:

Green's formel och areor:

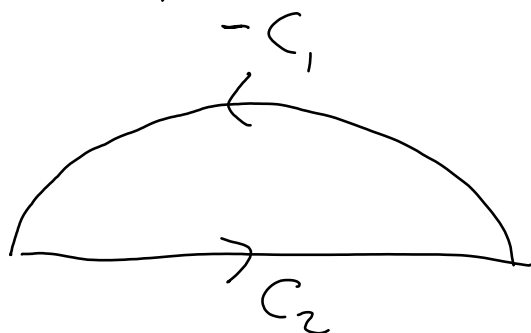
Om tar $\langle P, Q \rangle$ som $\langle -y, 0 \rangle$, $\langle 0, x \rangle$ eller

$$\left\langle -\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \right\rangle, \quad \text{får} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

$$\text{area}(D) = \iint_D 1 dA = \int_C x dy = \int_C -y dx = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$$

Ex Beräkna arean av området under kurvan
 $(t - \sin t, 1 - \cos t)$ för $0 \leq t \leq 2\pi$.

Området begränsas av C enligt figur



$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (t, 0)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Arean ges då av

$$A = - \int_C y dx = - \int_{C_1} y dx - \int_{C_2} y dx = \int_{C_1} y dx - \int_{C_2} y dx.$$

$$\int_{C_1} y dx = \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t = \left\{ \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} + 2\cos t + \cos 2t dt = 3\pi$$

$$\int_{G_2} y dx = 0 \quad \text{för } y=0 \text{ på } C_1$$

Alltså: $A = 3\pi$.