

Sammanfattning Föreläsning 17

Metod för att hitta potential f till konservativt vektorfält

$$F = \langle P, Q \rangle: \quad \text{Vill lösa} \begin{cases} f_x = P & (i) \\ f_y = Q & (ii) \end{cases}$$

- a) Tar först en lösning f_0 till (i), $f_0 = \int P \, dx$. Allmänna lösningen till (i) är då $f(x, y) = f_0(x, y) + g(y)$ (*).
 b) Sätter in lösningen från (*) i (ii) för att bestämma g :
 $f_y \stackrel{(*)}{=} (f_0)_y + g'(y) \stackrel{(ii)}{=} Q \Rightarrow g(y) = \int Q - (f_0)_y \, dy.$

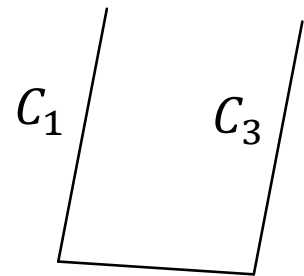
En kurva C är **styckvis glatt** om den kan delas upp i glatta kurvor $C_1, \dots, C_m$ där C_i slutar där C_{i+1} börjar.

Då definierar man

$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \dots + \int_{C_m} f \, ds$$

och

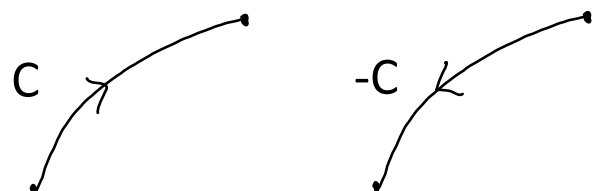
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



För integraler av vektorfält längs C ser man C som en *orienterad kurva*, dvs. den består av punkter och en riktning.

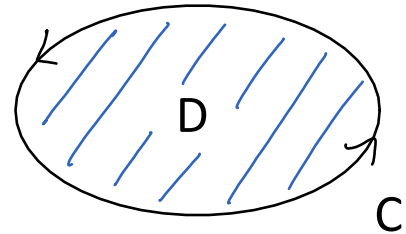
Man definierar kurvan $-C$ som kurvan som består av samma punkter men går i motsatt riktning.

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



En enkel sluten kurva C (som börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv) **begränsar** ett område D , dvs. C är randen till D .

C är **positivt orienterad** om den går moturs kring D (D på vänster sida om man följer C i positiv riktning), annars är den **negativt orienterad**.



Notation

C kurva, parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$

$\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ vektorfält

Då betecknar man

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) dt$$

också med

$$\int_C P dx + Q dy$$

(dvs $dx = x'(t)dt$ och $dy = y'(t)dt$)

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D . Då är

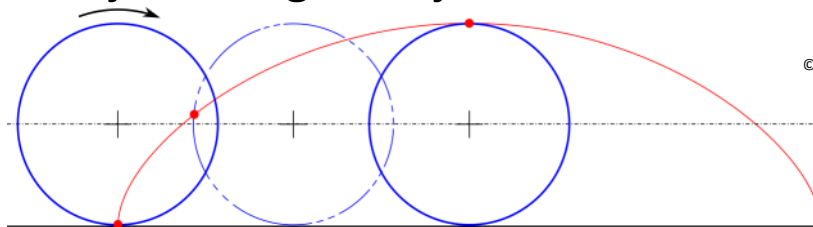
$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Användbart specialfall:

$$\text{area}(D) = \int_C -y \, dx = \int_C x \, dy = \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy$$

Tillägg till Föreläsning 17

I exemplet förra gången beräknade vi arean under cykloiden $(t - \sin t, 1 - \cos t)$. Cykloiden beskriver hur en punkt på ett hjul rör sig när hjulet snurrar.



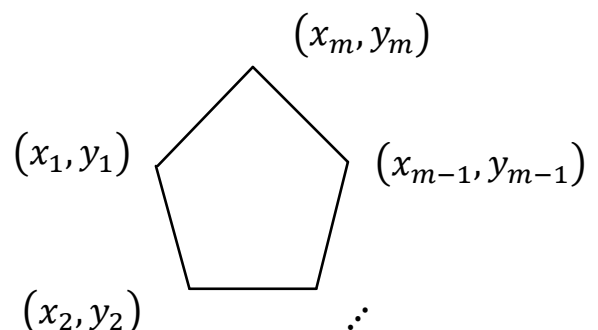
© Användare: BoH and Cdang, Wikimedia Commons, CC-BY-SA-3.0

Går att lösa ut x som funktion av y : $x = \cos^{-1}(1 - y) - \sqrt{y(2 - y)}$ och integrera för att beräkna arean, men krångligt.

Metoden igår klart lättare.

Exempel En polygon är ett område i planet som begränsas av ett antal rätta linjer som inte skär varandra.

Om polygonen har hörn i $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$, uppräknade moturs, så ger formeln $A = \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy$ att polygonens area är



$$\frac{1}{2} ((x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{m-1} y_m - x_m y_{m-1}) + (x_m y_1 - x_1 y_{m-1}))$$

(se övning 16.4.21)

Exempel på användningar av Greens formel:

- a) Planimeter: Verktyg som mäter area av område
- b) Bevisa satsen om konservativa vektorfält på enkelt sammanhängande områden (s. 1089)
- c) Formel för area av polygon (se slides)

Parametriserade ytor 16.6

En kurva C är 1-dim, beskrivs men en parameter $t \in \mathbb{R}$.

Def En parametriserad yta S ges av en vektorvärd funktion $r(u,v) \in \mathbb{R}^3$, $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.
(2-dim, 2 parametrar)

Man skriver ofta ut r i komponenter

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Ex a) En sfär med radie 2 och centrum i origo ges av

$$r(u,v) = (2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 2 \cos u)$$

$$(u,v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

(sfäriska koord., $\phi = u$, $\theta = v$, $\rho = 2$)

b) Om $f(x,y)$ reellvärd funktion på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ så är grafen till f en parametriserad yta

$$r(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad (u,v) \in D,$$

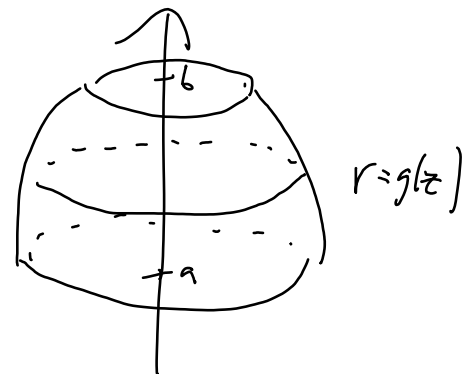
(skriver ofta $(x, y, f(x,y))$ istället)

c) Om $g: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ ges

rotationssytan kring z-axeln med radie $g(z)$ är

$$r(u, v) = (g(u) \cos v, g(u) \sin v, u)$$

(cylindriska koordinat, $r = g(u)$, $\theta = v$, $z = u$)



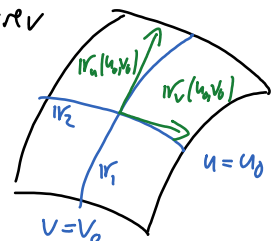
Tangentplan till parametriserad yta 16.6

Låt S vara en yta som ges av $r(u, v)$.

Fixera $(a, b, c) = r(u_0, v_0) \in S$.

- $r_u(u_0, v_0)$ och $r_v(u_0, v_0)$ vektorer av partiella derivator.

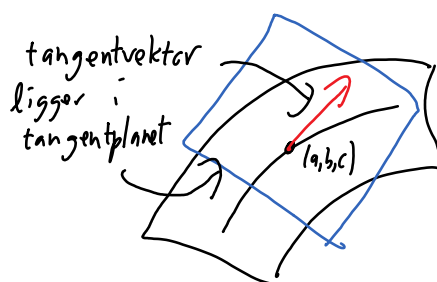
Kurvor $r_1(u) = r(u, v_0)$ och $r_2(u_0, v) = r(u_0, v)$ ligger i S , där u eller v är konstant, och dess tangentvektorer i u_0 resp. v_0 är de partiella derivatorna ovan.



Def S är glatt i $r(u_0, v_0)$ om

$$r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow \text{de är ej parallella})$$

Def Om S glatt i $(a, b, c) = r(u_0, v_0)$ så är tangentplanet det plan som går genom (a, b, c) och innehåller alla tangentvektorer till kurvor i S genom (a, b, c)

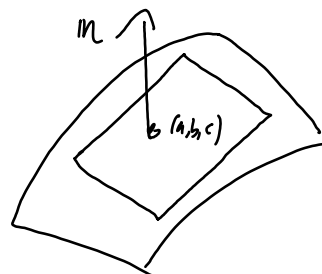


Formel: Tangentplanet i $(a, b, c) = r(u_0, v_0)$ har

normalvektor $n = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$ och om skriver $n = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ så ges det av

$$n_1(x-a) + n_2(y-b) + n_3(z-c),$$

Härledning, liknande som för tangentplan av graf, se hemsida.



Ex Låt S vara rotationsvolymen

$$r(u, v) = (g(u) \cos v, g(u) \sin v, v)$$

Beräkna tangentplanet i $r(0, 0)$

$$r'_u = (g'(u) \cos v, g'(u) \sin v, 1)$$

$$r'_v = (-g(u) \sin v, g(u) \cos v, 0)$$

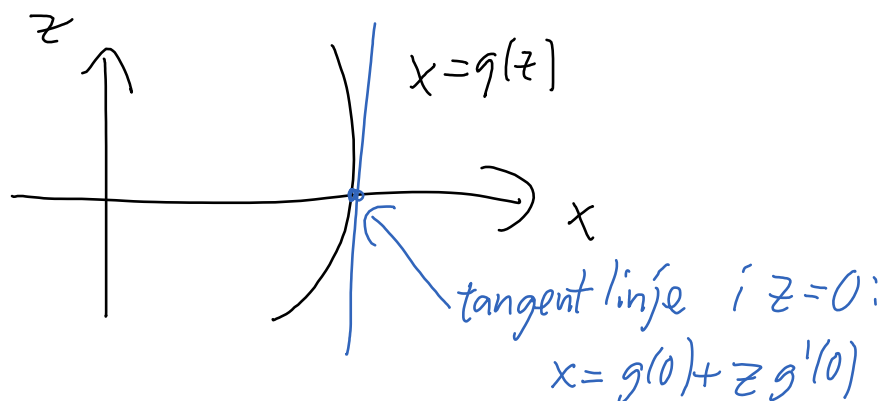
$$n = r'_u(1, 0) \times r'_v(1, 0) = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g'(0) & 0 \\ 0 & g(0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = (-g(0), 0, g'(0)g(0))$$

Så tangentplanet blir:

$$-g(0)(x - g(0)) + 0 \cdot (y - 0) + g'(0)g(0)(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = g(0) + z g'(0)$$

Rimligt, för om betraktas detta i xz -planet:



Om S är ytan $z = f(x, y)$ får
man samma formel som tidigare för tangentplanet:

för om $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ så blir

$$n = r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle.$$

och $r(a, b) = (a, b, f(a, b))$, så tangentplanet blir:

$$-f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b) + 1 \cdot (z - f(a, b)) = 0$$

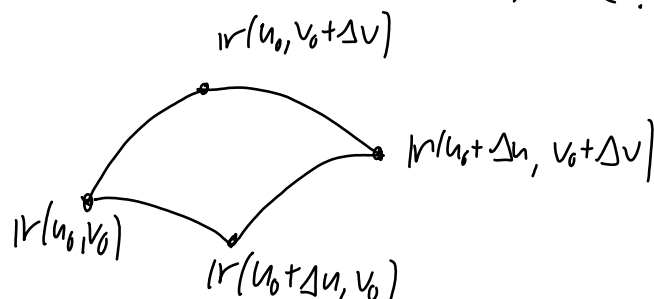
$\Leftrightarrow$

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Area av parametriserade ytor 16.6

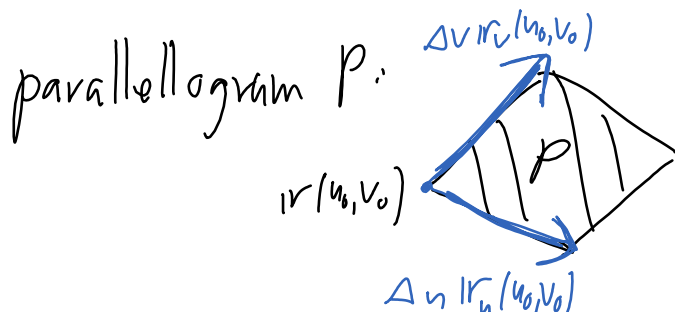
Antar har parametriserad yta S genom punkt $(a, b, c) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Tar rektangel $R = [u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$,
och låter S_0 delen av S när $(u, v) \in R$.



m.h.a. linearisering: $\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) \approx \mathbf{r}(u_0, v_0) + \Delta u \mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ osv,

får om $\Delta u, \Delta v$ små att S_0 nära följande



Enligt egenskaper hos kryssprodukt är arean av P

$$|(\Delta u \mathbf{r}'_u(u_0, v_0)) \times (\Delta v \mathbf{r}'_v(u_0, v_0))| = |\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)| \cdot \Delta u \cdot \Delta v.$$

M.h.a. Riemannsummor härleder man

Formel för area av yta S parametriserad av $r(u,v), (u,v) \in D$:

$$A = \iint_D |r'_u \times r'_v| dA$$

Ex Om 5 iv grafen $z=f(x,y)$, dvs

$$ir(x,y) = (x,y,f(x,y)) \text{ s\u00f9 vi att}$$

$$N_x \times N_y = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$\Rightarrow |r_x + ir_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

vilket ger formeln från förra veckan:

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dA.$$

Ex Låt S vara rotationsvolymen

$$r(u,v) = (g(u)\cos v, g(u)\sin v, u) \quad (u,v) \in D = [a,b] \times [a,2\pi]$$

Da blir $|r_u \times r_v| = g(u) \sqrt{1 + g'(u)^2}$ $\left(\begin{array}{l} \text{så g fört ut att} \\ r_u(0,0) \times r_v(0,0) = \\ = \langle -g(0), 0, g'(0)g(0) \rangle \end{array} \right)$

$$\begin{aligned} R_u \times R_v &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle\langle \\ g'(u) \cos v & g'(u) \sin v & 1 \\ -g(u) \sin v & g(u) \cos v & 0 \end{pmatrix} \\ &= \langle -g(u) \cos v, -g(u) \sin v, g'(u) g(u) \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{=1} \rangle \end{aligned}$$

Arean blir då:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA = \iint_D g(u) \sqrt{1 + g'(u)^2} \, dA = \int_a^b \int_0^{2\pi} g(u) \sqrt{1 + g'(u)^2} \, dv \, du \\ &= 2\pi \int_a^b g(u) \sqrt{1 + g'(u)^2} \, du. \end{aligned}$$

Detta specialfall finns i avsn. 8.2, s. 547,
med en alternativ härledning.
