Sammanfattning Föreläsning 17

Metod för att hitta potential f till konservativt vektorfält

$F = \langle P, Q \rangle$: Vill lösa $\begin{cases} f_x = P & (i) \\ f_y = Q & (ii) \end{cases}$

a) Tar först en lösning f_0 till (i), $f_0 = \int P\,dx$. Allmänna lösningen till (i) är då $f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) \quad (*)$.

b) Sätter in lösningen från (*) i (ii) för att bestämma g:

$$f_y \underset{(*)}{=} (f_0)_y + g'(y) \underset{(ii)}{=} Q \quad \Rightarrow \quad g(y) = \int Q - (f_0)_y \, dy.$$

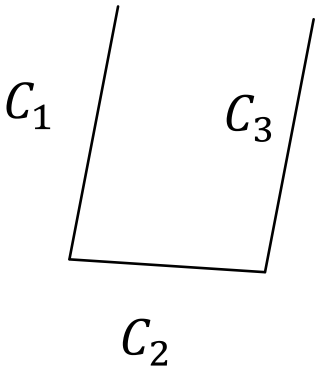
En kurva C är **styckvis glatt** om den kan delas upp i glatta kurvor $C_1, \ldots, C_m$ där C_i slutar där C_{i+1} börjar.

Då definierar man

$$\int_C f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \cdots + \int_{C_m} f\, ds$$

och

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \cdots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

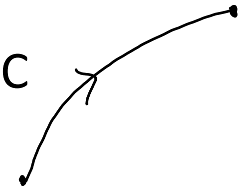


För integraler av vektorfält längs C ser man C som en *orienterad kurva,* dvs. den består av punkter och en riktning.

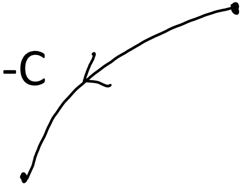
Man definierar kurvan $-C$ som kurvan som består av samma punkter men går i motsatt riktning.

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = - \int_{C} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

C

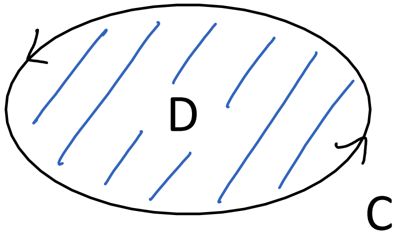


-C



En enkel sluten kurva C (*som börjar och slutar i samma punkt och inte korsar sig själv)* **begränsar** ett område D, dvs. C är randen till D.

C är **positivt orienterad** om den går moturs kring D (D på vänster sida om man följer C i positiv riktning), annars är den **negativt orienterad.**



Notation

C kurva, parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big),\ a \leq t \leq b$

$\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ vektorfält

Då betecknar man

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\mathrm{d}t = \int_C P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\mathrm{d}t$$

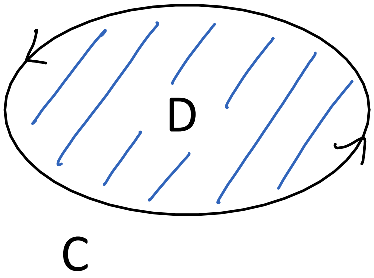
också med

$\int_C P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y$

(dvs $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$ och $\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$)

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D. Då är

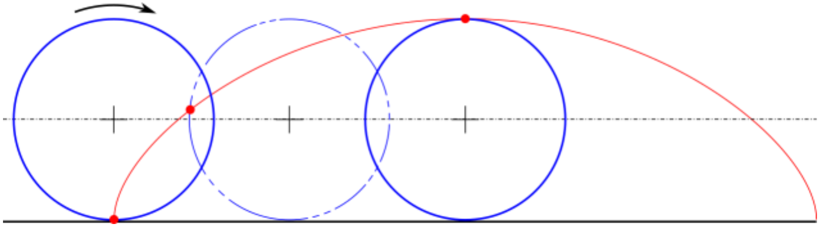
$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$



Användbart specialfall:

$$\mathrm{area}(D) = \int_C -y\,\mathrm{d}x = \int_C x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_C -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

I exemplet förra gången beräknade vi arean under cykloiden $(t - \sin t, 1 - \cos t)$. Cykloiden beskriver hur en punkt på ett hjul rör sig när hjulet snurrar.

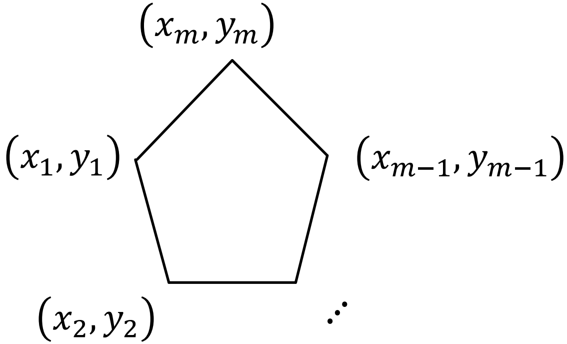


Går att lösa ut x som funktion av y: $x = \cos^{-1}(1 - y) - \sqrt{y(2 - y)}$ och integrera för att beräkna arean, men krångligt.

Metoden igår klart lättare.

Exempel En <u>polygon</u> är ett område i planet som begränsas av ett antal räta linjer som inte skär varandra.

Om polygonen har hörn i $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$, uppräknade moturs, så ger formeln $A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$ att polygonens area är



$$\frac{1}{2}\left((x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{m-1}y_m - x_my_{m-1}) + (x_my_1 - x_1y_{m-1})\right)$$

(se övning 16.4.21)