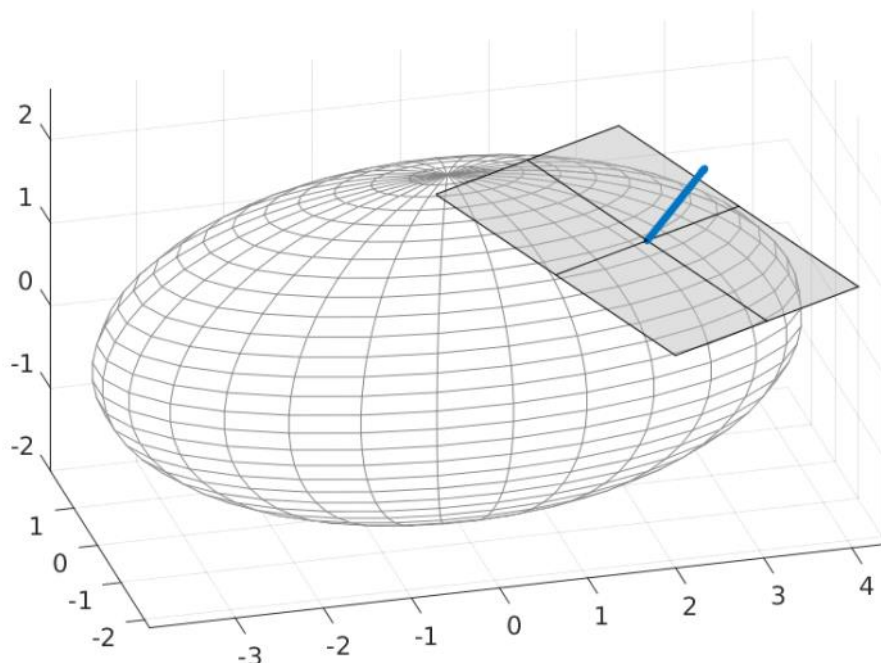


Sammanfattning Föreläsning 18

En **parametriserad yta** S ges av en vektorvärd funktion $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.



Dess **tangentplan** i $(a, b, c) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ ges av

$$\mathbf{n} \cdot \langle x - a, y - b, z - c \rangle = 0,$$

där $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$.

Area av yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$:

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, dA.$$

Påminnelse Om S är grafen $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$

som kan parametriseras av $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ så är

$$\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = \langle -f_x(x, y), -f_y(x, y), 1 \rangle$$

och arean blir

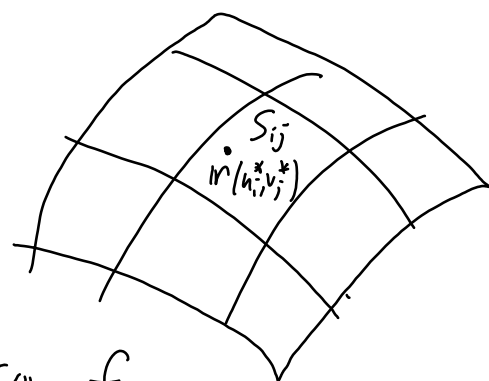
$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dA$$

Ytintegraler av funktioner 16.7

På liknande sätt som för kurvintegraler av funktioner definierar man ytintegraler av funktioner som gränsvärde av Riemannsummor

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(|r(u_i^*, v_j^*)| \text{area}(S_{ij}))$$

och med liknande härledning som för arean får man:



Formel för ytintegral av funktion f

över yta S parametriserad av $r(u, v)$, $(u, v) \in D$:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(r(u, v)) |r_u(u, v) \times r_v(u, v)| dA.$$

Om har yta S med densitet $\rho(x, y, z)$, har:

$$\underline{\text{massa}} = \iint_S \rho(x, y, z)$$

$$\underline{\text{masscentrum}} \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$$

$$\text{där} \quad M_x = \iint_S x \rho(x, y, z) dS \quad \text{osv.}$$

Flödesintegraler 16.7

(Kurvintegraler av vektorfält fysiskt motiverade,
kurvintegral av kraftvektorfält = arbete)

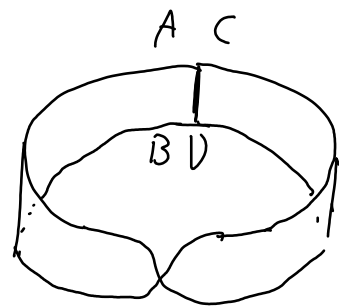
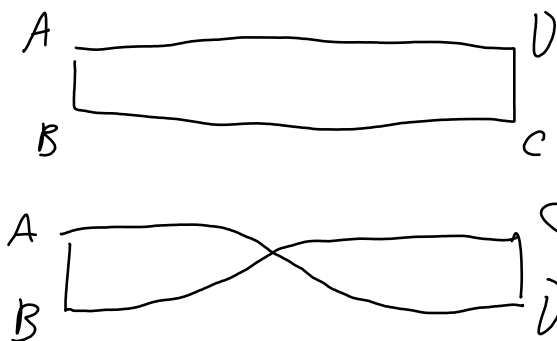
Vill definiera ytingegral av vektorfält $\vec{F}$ över yta S så att gör flöde, dvs om $\vec{F}$ hastighetsvektorfält för tex. en vätska, så är flödet volymen av vätskan som passerar S (per tidsenhet).

(Behöver först följande begrepp)

Orientering av ytor

Möbiusbandet speciell yta.

Det fås genom att ta remsa, vrida halvt varv och klistra längs kanten.



Flöde beror på riktning, behöver "bak- och framsida" / "in- och utsida". Går inte prata om på Möbiusbandet, för omstartar på ena sidan, går runt ett varv så hamnar man på andra sidan.

Påminn: Om S yta par. av $r(u,v)$, så är

$$n = \frac{r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)}{|r'_u(u,v) \times r'_v(u,v)|}$$

en enhetsnormalvektor till tangentplanet till S i $r(u,v)$.

Om n är en normalvektor till tangentplanet
så är även $-n$ en normalvektor.

(På "bra" = orienterade ytor, kan välja en av dessa på
kontinuerligt sätt.)

Def Om S yta s.a. i varje punkt kan välja en
enhetsnormalvektor $n(x,y,z)$ och denna varierar
kontinuerligt, så är S en orienterad yta och
 n kallas en orientering av S .

Ex a) Möbiusbandet är inte en orienterad yta.

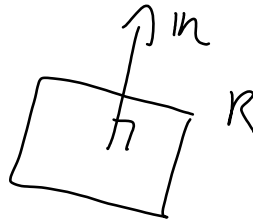
b) Om S glatt orienterad yta, parametriserad av
 $r(u,v)$ så ger
$$n = \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$$
 en orientering av S .

Speciellt, om S är ytan $z=f(x,y)$ och $r(x,y)=(x,y,f(x,y))$
så ger
$$n = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$
 en orientering av S

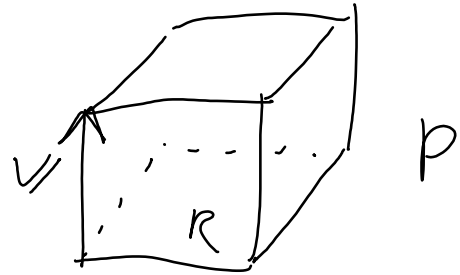
(som pekar uppåt i z -riktningen).

Flöde genom en yta

Antag R en rektangel i $\mathbb{R}^3$, enhetsnormalvektor n



Om en vätska rör sig med konstant hastighet v så blir volymen av vätskan som strömmar genom R lika med volymen av parallelepipeden P med bas R och "höjdvektor" v



eftersom det som passerat R under en tidsenhet är precis det inuti P .

Volymen räknas med tecken, så är negativ om v och n pekar mot olika sidor av R .

(s. 804)

$$\text{volym} = \text{höjd} \cdot \text{basarea} = \underset{\substack{\text{höjd} \\ \text{(med tecken)}}}{(v \cdot n)} \cdot \text{area}(R)$$

Om S orienterad yta med orientering som ges av $m(x,y,z)$ och $v(x,y,z)$ varierande hastighet härleds man genom att approximera S med rektanglar och Riemannsummor att flödet genom S blir vara

$$\iint_S v \cdot m \, dS$$

Def Ytintegralen av ett vektorfält F över en yta S med orientering m ges av

$$\iint_S F \cdot dA = \iint_S F \cdot m \, dS.$$

Ytintegralen kallas också flödesintegral (flux integral) eftersom den representerar det när F är ett hastighetsvektorfält, och dess värde kallas flödet av F genom S .

Alternativ formel

Om S glatt orienterad yta, par. av $r(u,v)$,

$(u,v) \in D$, så

a) $\iint_S f \, dS = \iint_D f \cdot |r_u \times r_v| \, dA$

b) $m = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ ger en orientering av S .

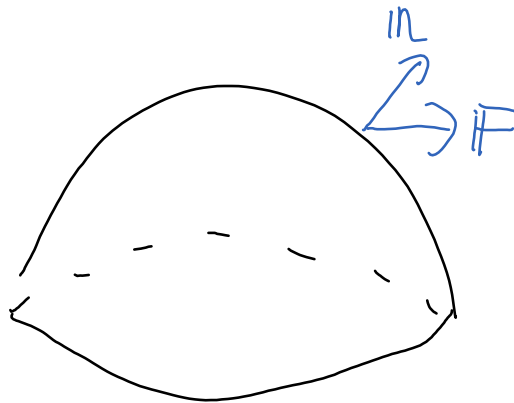
Med den orienteringen blir $d\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_D \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA \\ &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA\end{aligned}$$

Kort:
$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, dA.$$

Ex Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \langle x, y, 0 \rangle$ upp genom delen av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger över $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Paraboloiden är grafen till $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $(x, y) \in D$,



Grafen är en glatt orienterad parametriserad yta,

$\mathbf{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ med normalvektor

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|}, \quad \text{där} \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) \\ = (-2x, -2y, 1).$$

(har positiv z-komponent, så pekar upp ur ytan).

Så flödet blir:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y \, dA =$$

$$= \iint_D (x,y,0) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dA = 2 \iint_D x^2 + y^2 \, dA$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{polära koordinater.} \\ dA = r \, d\theta \, dr, \quad D: 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$$= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \, r \, d\theta \, dr =$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^3 \, dr = 4\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \pi.$$