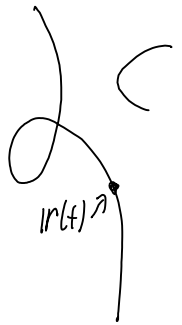


Sammanfattning Föreläsning 1

- En *kurva* C är ett geometriskt objekt som beskrivs med *en* parameter, vilken ges som alla punkter

$$r(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{eller} \quad r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$



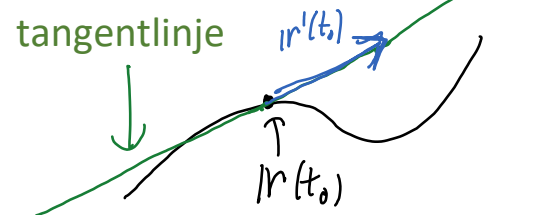
- Den vektorvärda funktionen $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eller $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ kallas en *parametrisering* av C och beror alltså på en variabel och har två eller tre komponenter

- Derivatan* eller *tangentvektorn* till $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ i t_0 är $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

(om funktionerna är deriverbara)

- Tangentlinjen* till $r(t)$ i t_0 är linjen som innehåller $r(t_0)$ med riktningsvektor $r'(t_0)$ och kan parametreras av

$$L(t) = r(t_0) + t r'(t_0)$$



Mer om kurvor senare. Nu vänder på det

Funktioner av flera variabler, 14.1

Def En (reellvärd) funktion av två variabler är en regel som till varje (x,y) i någon mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ger ett unikt reellt tal $f(x,y)$.
Mängden D kallas funktionens definitionsområde (domain) och $\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$ funktionens värdområde (range)

1) Koordinatfunktionerna x och y är grundläggande exempel på funktioner.

2) Om $f(x,y)$, $g(x,y)$ funktioner av två variabler kan man skapa nya funktioner:

$$f(x,y) + g(x,y), \quad f(x,y) \cdot g(x,y), \quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \quad g(x,y) \neq 0$$

$$\sin(f(x,y)), \quad e^{f(x,y)}, \quad \dots$$

$$\sqrt{f(x,y)}, \quad \ln f(x,y) \quad \text{om } f(x,y) \geq 0$$

Ex Vad är värde- och definitionsmängd för $\sqrt{x+y}$?

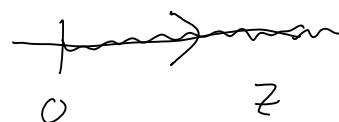
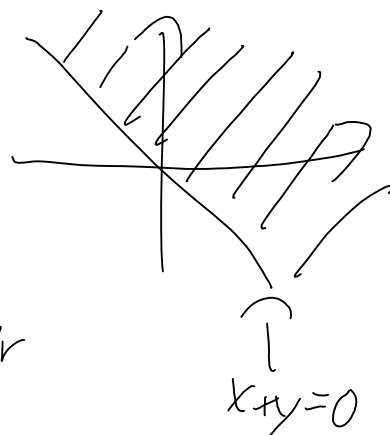
$\sqrt{x+y}$ def. om $x+y \geq 0$

Def. mängd: $\{(x,y) \mid x+y \geq 0\}$

$\sqrt{x+y}$ alltid ≥ 0 och om $z \geq 0$ så är

$$f(z^2, 0) = \sqrt{z^2} = z$$

Värdemängd: $\{z \mid z \geq 0\} = [0, \infty)$.

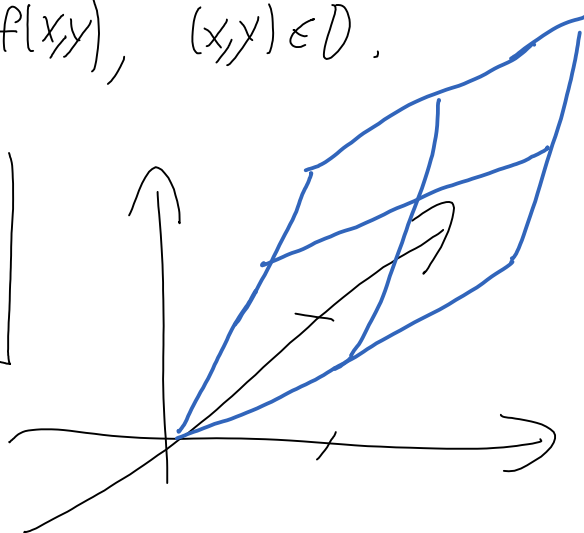


Hur förstå?

Def Grafen till en funktion $f(x,y)$ med def. mängd D är alla punkter (x,y,z) i rummet s.a.

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

Ex Rita grafen till
 $f(x,y) = x+y$

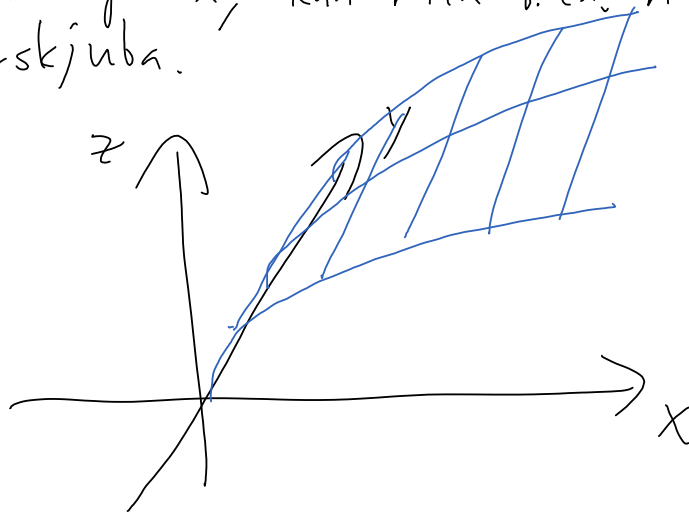


Ritar grafen längs räta linjer, $(x,0), (x,1), (x,2), (0,y), (1,y), \dots$

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x, & f(x,1) &= x+1, & f(x,2) &= x+2, \\ f(0,y) &= y, & f(1,y) &= y+1, & f(x,y) &= y+2 \end{aligned}$$

Ex Rita grafen till $f(x,y) = \sqrt{x}$.

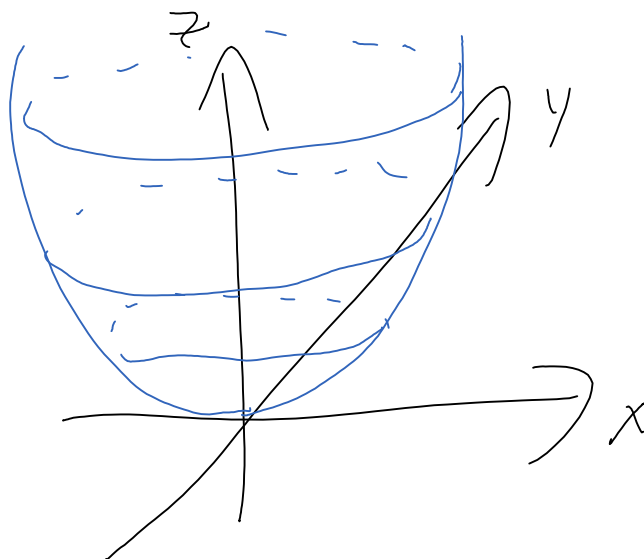
Beror bara på x , kan rita t.ex. när $y=0$ och förskjuba.



Ex Rita grafen till $f(x,y) = x^2 + y^2$.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ avståndet från (x,y) till $(0,0)$

$f(x,y) = r^2$ beror bara på avståndet till origo, räcker rita längs t.ex. pos. x-axeln, $(x,0)$ $x \geq 0$, där $x=r$, och rotera kring z -axeln.



Med komplicerade grafer svårt rita utan dator. Kan vara svårt förstå även med dator.
Annan möjlighet:

Def En nivåkurva till en funktion $f(x,y)$ är alla punkter (x,y) s.a. $f(x,y) = k$ för ett givet $k \in \mathbb{R}$.

Ritar man nivåkurvor för olika värden av k får man en höjdkarta (contour map) som kan användas för att bättre förstå en funktion

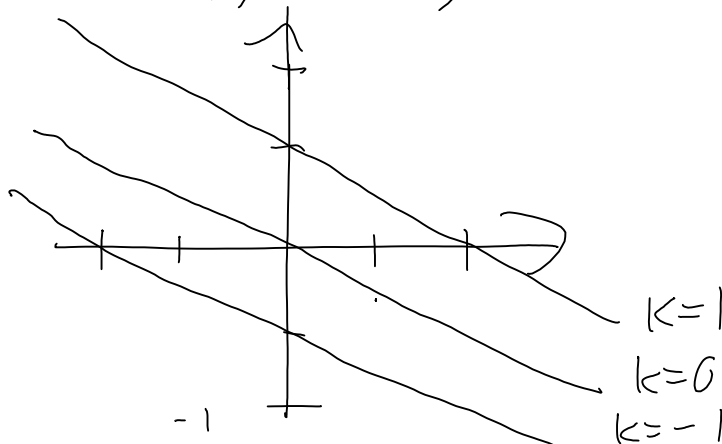
Ex Beskriv nivåkurvorna och rita höjdkartor för följande funktioner

a) $f(x,y) = x + 2y$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

c) $f(x,y) = e^{xy}$

a) $f(x,y) = x + 2y = k \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{2}$



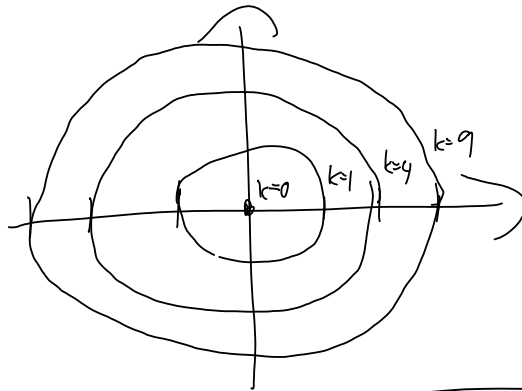
↑
rät linje,
lutning $-\frac{1}{2}$,
skär x-axeln i $\frac{k}{2}$

$$b) f(x,y) = x^2 + y^2 = k$$

om $k < 0$ tom!

om $k = 0$, bara $x=y=0$.

om $k > 0$, $x^2 + y^2 = k = (\sqrt{k})^2$
cirkel radie $\sqrt{k}$



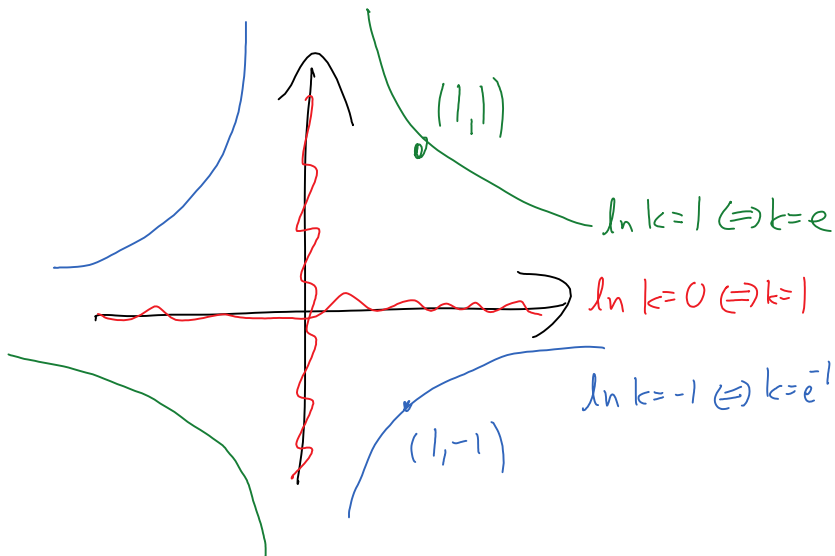
$$c) f(x,y) = e^{xy} = k. \quad e^{xy} > 0 \text{ så tom om } k \leq 0.$$

om $k > 0$, kan ta logaritm: $xy = \ln k$

Två fall:

$$1) \text{ om } x \neq 0, \\ y = \ln k / x$$

$$2) \text{ om } x = 0, \\ 0 = \ln k \Leftrightarrow k = 1.$$



Man kan på liknande sätt studera funktioner $f(x,y,z)$ av tre variabler,

men: Graten $w=f(x,y,z)$ befinner sig i ett rum med fyra dimensioner. kan inte rita upp.

däremot: Nivåytan $f(x,y,z)=k$ kan (i enklare fall) visualiseras

Ex Beskriv nivåytorna till $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 = (\text{avstånd från } (x,y,z) \text{ till origo})^2$$

$$\Rightarrow \text{nivåytorna } x^2+y^2+z^2=k$$

$$\text{blir } \begin{cases} \text{sfär radie } \sqrt{k} & k \geq 0 \\ \text{tom} & k < 0 \end{cases}$$

Repetition, gränsvärden i en variabel

I envariabelkursen, studerade funktioner m.h.a. bland annat kontinuitet och derivator. Dessa begrepp är definierade med hjälp av gränsvärden

Kontinuitet: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ Derivata: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

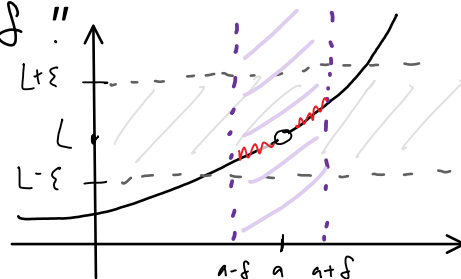
Behöver gränsvärden för att prata om kontinuitet och deriverbarhet av funktioner i flera variabler.

Påminnelse: I en variabel, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ betyder informellt:

"f(x) är hur nära L som helst, så länge x är tillräckligt nära a"

Mer precist matematiskt formulerat:

"för varje $\varepsilon > 0$, så finns $\delta > 0$ s.a. om $|f(x) - L| < \varepsilon$ om $|x - a| < \delta$ "



För varje "band" i y-led kring L, kan välja "band" i x-led kring a, så att på bandet i x-led ligger grafen innanför bandet i y-led