

Sammanfattning Föreläsning 19

Ytintegraler av funktion $f(x, y, z)$ över yta S parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, där $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| dA$$

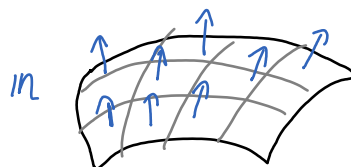
Om har yta S med densitet $\rho(x, y, z)$ så är dess

massa $= \iint_S \rho(x, y, z) dS$ och **masscentrum** $= \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$,
där $M_x = \iint_S x \rho(x, y, z) dS$ osv.

En yta S är *orienterad* om man i varje punkt kan välja en enhetsnormalvektor $\mathbf{n}(x, y, z)$ som varierar kontinuerligt. Då kallas $\mathbf{n}$ en *orientering* av S .

Om S parametriseras av $\mathbf{r}(u, v)$ kan man ta $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$.

Med hjälp av $\mathbf{n}$ kan man då säga att S har "två sidor" (fram-/baksida eller in-/utsida), dvs den sida som pekar i samma riktning som $\mathbf{n}$ och den motsatta.



Ytintegralen av ett vektorfält $\mathbf{F}$ över en orienterad yta S med orientering $\mathbf{n}$ ges av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

(obs: högerledet är en ytintegral av en funktion)

Om S är parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ och har orientering $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ så blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA \quad (d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dA)$$

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsvektorfält för en vätska eller gas så är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

volymen av vätskan eller gasen som passerar genom S under en tidsenhet

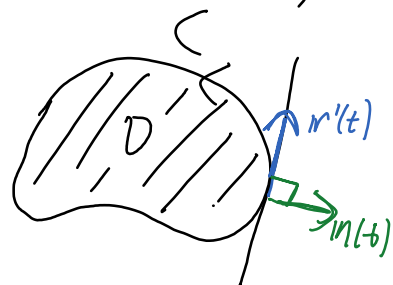
(där volymen är positiv eller negativ beroende på om $\mathbf{F}$ och $\mathbf{n}$ pekar i samma riktning eller inte)

Därför kallas ytintegraler av vektorfält också för **flödesintegraler** och värdet kallas för **flödet** av $\mathbf{F}$ genom S .

Divergens av vektorfält och flöde genom kurva 16.5

Antag C pos. orienterad kurva som begränsar område D ,
ges av $r(t) = (x(t), y(t))$.

Kan visa att $n = \frac{\langle y'(t), -x'(t) \rangle}{|r'(t)|}$



är en enhetsnormalvektor till tangentlinjen som
pekar ut från D . (n fås genom att rotera $r'(t)$ $-\pi/2$ grader och normalisera)

Som för y -tor, definierar flödet av $F = \langle P, Q \rangle$
som

$$\int_C F \cdot n \, ds$$

Skall härleda formel för flödet som dubbelintegral
över D .

Påminnelse a) Kurvintegral av funktion:

$$\int_C f \, ds \quad \text{där} \quad ds = |r'(t)| \, dt$$

b) Kurvintegral av vektorfält:

$$F = \langle P, Q \rangle, \quad \int_C F \cdot dr = \int_C P \, dx + Q \, dy.$$

där $dx = x'(t) \, dt$ och $dy = y'(t) \, dt$

c) Greens formel:
$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dA$$

Flöde:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_a^b \frac{P y' - Q x'}{\underbrace{|\mathbf{n}'|}_{\substack{\text{def. av } \mathbf{n} \\ \text{och } |\mathbf{n}|}}} \, dt \stackrel{b)}{=} \int_C -Q dx + P dy$$

$$\stackrel{c)}{=} \iint \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}}_{\text{viktigt, så ger detta ett namn!}} \, dA.$$

viktigt, så ger detta ett namn!

Def Divergensen av

$$i) \mathbf{F} = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \text{ är } \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$ii) \mathbf{F} = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \text{ är } \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Kan skrivas kort:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\text{där } \nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \text{ el. } \nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle.$$

Räkningen ovan kan då skrivas:

Divergenssatsen för kurvor:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

(senare: fysisk tolkning av detta).

Divergenssatsen för ytor 16.9

Def S är en sluten yta om den är randen till ett begränsat område $E \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ex Enhetssfären $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ är en sluten yta som är randen till klotet $E = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Kommer i allmänhet anta S består av ändligt många glatta ytor, som t.ex. randen till en kub som består av sex rektanglar.

Def S är positivt orienterad om dess orientering inpekar ut från E .



Divergenssatsen Låt $E \subseteq \mathbb{R}^3$ med rand S och antag att S är positivt orienterad och består av ändligt många glatta ytor och att vektorfältet F har kontinuerliga partiella derivator. Då är

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_E \operatorname{div} F \, dV.$$

Beviset i boken (s. 1129-31) är i fallet när E är ett enkelt område, dvs när det sammanhängs är ett typ 1, typ 2 och typ 3-område.

Visar det i ett specialfall (samma idé i allmänhet)

Ex Låt E vara ett rätblock $E = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.
och antag $F = (0, 0, R)$

Då följer divergenssatsen av upprepade integration:

Låt $D = [a, b] \times [c, d]$ s. a. $E = D \times [e, f]$.

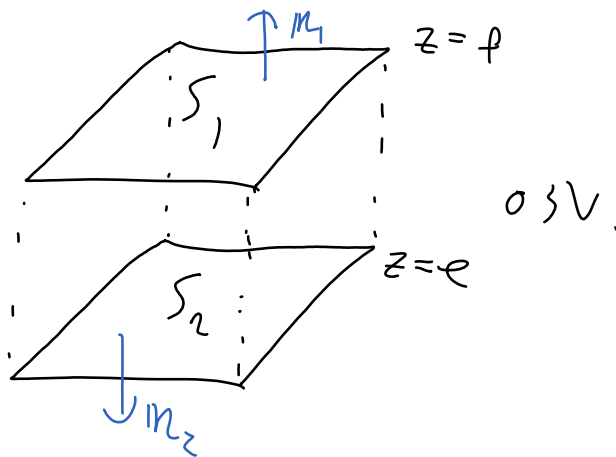
$$\text{Då är } \iiint_E \operatorname{div} F dV = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV =$$

$$= \iint_D \int_e^f \frac{\partial R}{\partial z} dz dA = \iint_D [R(x, y, z)]_{z=e}^{z=f} dA =$$

$$= \iint_D R(x, y, f) dA - \iint_D R(x, y, e) dA.$$

Vi jämför nu detta med y-integralerna i divergenssatsen.

Randen S till E består av 6 st rektanglar,



$$S_1 = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = f \}$$

och för att skall vara positivt orienterad, $n_1 = \langle 0, 0, 1 \rangle$.

$$\text{Då blir } \iint_{S_1} F \cdot dS = \iint_{S_1} F \cdot n_1 dS$$

$$= \iint_D \langle 0, 0, R(x, y, f) \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle dA,$$

vilket är lika med första integralen.

På liknande sätt blir $\iint_{S_2} F \cdot dS$ lika med andra integralen. (Minustecken för $n_2 = \langle 0, 0, -1 \rangle$.)

Ettersom $n_3, \dots, n_6$ bara pekar i x eller y-led blir dess z-komponent 0, så

$$\iint_{S_i} F \cdot dS = \iint_{S_i} \underbrace{\langle 0, 0, R \rangle \cdot n_i}_{=0} dS = 0.$$

för $i=3, \dots, 6$.

För att sammanfatta:

$$\begin{aligned} \iiint_E \operatorname{div} F dV &= \iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS = \\ &= \iint_{S_1} F \cdot dS + \dots + \iint_{S_6} F \cdot dS = \iint_S F \cdot dS, \end{aligned}$$

vilket visar divergenssatsen i detta specialfall.

Ex Beräkna flödet av $F = \langle z^6, z^4, z^2 \rangle$ ut ur tetradern
 $E = \{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y \}$.

Om S den positivt orienterade randen till E så är flödet ut ur E :

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot dS &\stackrel{\substack{(\operatorname{div} F) \\ (\text{satsen})}}{=} \iiint_E \operatorname{div} F dV = \iiint_E z z dV = \\ &\stackrel{\substack{(\text{upprepad} \\ \text{integration})}}{=} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[z^2 \right]_0^{z=1-x-y} dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy dx = \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3} dx = \left[-\frac{(1-x)^4}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Fysisk innebörd av $\text{div } \mathbf{F}$

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsvektorfält för en vätska och S begränsar E får vi:

$$\text{flödet ut ur } E = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV.$$

Om flödet inte varierar med tiden blir då

Volymen av vätskan
som produceras eller
konsumeras i E

$$= \text{flödet ut ur } E = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV$$

$\text{div } \mathbf{F}$ är alltså en "densitet" för hur mycket som produceras eller konsumeras i en punkt.