

## Sammanfattning Föreläsning 19

Ytintegraler av funktion  $f(x, y, z)$  över yta  $S$  parametriserad av  $\mathbf{r}(u, v)$ , där  $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ :

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| dA$$

Om har yta  $S$  med densitet  $\rho(x, y, z)$  så är dess

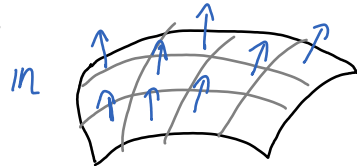
**massa** =  $\iint_S \rho(x, y, z) dS$  och **masscentrum** =  $\left( \frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$ ,

där  $M_x = \iint_S x \rho(x, y, z) dS$  osv.

En yta  $S$  är *orienterad* om man i varje punkt kan välja en enhetsnormalvektor  $\mathbf{n}(x, y, z)$  som varierar kontinuerligt. Då kallas  $\mathbf{n}$  en *orientering* av  $S$ .

Om  $S$  parametreras av  $\mathbf{r}(u, v)$  kan man ta  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$ .

Med hjälp av  $\mathbf{n}$  kan man då säga att  $S$  har "två sidor" (fram-/baksida eller in-/utsida), dvs den sida som pekar i samma riktning som  $\mathbf{n}$  och den motsatta.



Ytintegralen av ett vektorfält  $\mathbf{F}$  över en orienterad yta  $S$  med orientering  $\mathbf{n}$  ges av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

(obs: högerledet är en ytintegral av en funktion)

Om  $S$  är parametriserad av  $\mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$  och har orientering  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$  så blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA \quad (d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dA)$$

Om  $\mathbf{F}$  är ett hastighetsvektorfält för en vätska eller gas så är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

volymen av vätskan eller gasen som passerar genom  $S$  under en tidsenhet

(där volymen är positiv eller negativ beroende på om  $\mathbf{F}$  och  $\mathbf{n}$  pekar i samma riktning eller inte)

Därför kallas ytintegraler av vektorfält också för **flödesintegraler** och värdet kallas för **flödet** av  $\mathbf{F}$  genom  $S$ .