

Sammanfattning Föreläsning 20

Divergens av ett vektorfält

i) $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ i $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

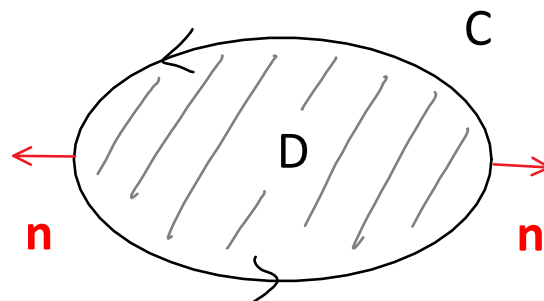
ii) $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ i $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Kortare: $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F}$, där $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle$ eller $\nabla = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$.

Låt C vara en enkel sluten kurva som begränsas av ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och låt $\mathbf{n}$ vara en enhetsnormalvektor till tangentlinjen till C som pekar ut från D . Då är flödet av ett vektorfält $\mathbf{F}$ ut genom C :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

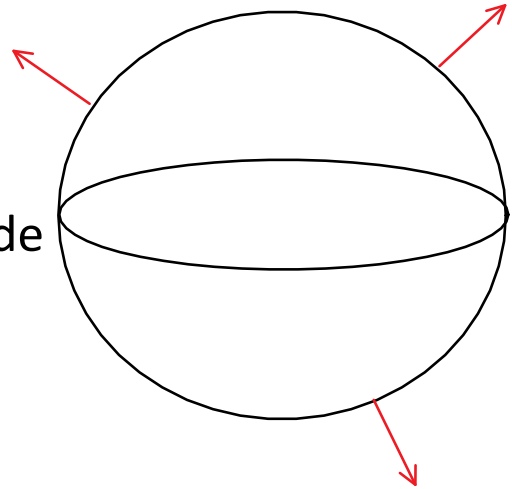
Divergenssatsen för kurvor

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

Om S är randen till ett område E så säger man att S är en *sluten yta*. S är *positivt orienterad* om dess orientering pekar ut från E

Divergenssatsen

Låt S vara den positivt orienterade randen till ett område $E \subseteq \mathbb{R}^3$ och $\mathbf{F}$ ett vektorfält på E .



Då är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Innebörd av divergens av ett vektorfält

Om $\mathbf{F}$ är ett hastighetsvektorfält för en vätska och E ett område i $\mathbb{R}^3$ så följer av divergenssatsen att

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{det som produceras} \\ \text{eller konsumeras i } E \end{array} \right\} = \{ \text{flödet ut ur } E \} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV,$$

dvs. $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är en "densitet" för hur mycket vätska som produceras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är positiv) eller konsumeras (om $\operatorname{div} \mathbf{F}$ är negativ).

Fysisk innebörd av divergens (forts)

Säg senast att om $\vec{F}$ är hastighetsvektorfält för en vätska så är $\operatorname{div} \vec{F}$ en "densitet" för produktion eller konsumtion:

$$\begin{array}{l} \text{volymen av vätskan} \\ \text{som produceras eller konsumeras} \\ \text{i ett område } E \end{array} \Rightarrow \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

Om $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) > 0$ blir då HL positivt för alla tillräckligt små områden E kring (x,y,z) och då måste vätska produceras kring (x,y,z) . Man säger att (x,y,z) är en källa (source).

Om $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) < 0$ måste istället vätska konsumeras kring (x,y,z) och man säger att punkten är en sänka (sink).

Om $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ överallt säger man att $\vec{F}$ är källfritt (incompressible) och om det innebär då att genom varje område strömmar alltid lika mycket ut som in.

Rotationen av ett vektorfält 16.5

Def Rotationen (curl) av ett vektorfält $F = (P, Q, R)$ i $\mathbb{R}^3$ är

$$\text{rot } F = \left\langle \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle.$$

Formeln kan sammanfattas

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \overset{i}{1} & \overset{j}{1} & \overset{k}{1} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Rotation används bland annat för att formulera två av Maxwell's lagar i elektromagnetism.

Om f har kont. part. andraderivator och $F = \nabla f$, så blir

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \overset{i}{1} & \overset{j}{1} & \overset{k}{1} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \dots \right\rangle$$

= 0 enl. Clairauts sats.

Sats: Om $\vec{F}$ är ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$
 vars komponenter har kont. partiella derivator
 och
 $\text{rot } \vec{F} = 0$ så är

$\vec{F}$ konservativ, dvs $\vec{F} = \nabla f$ för
 någon funktion f .

(Gäller mer allmänt på områden som är
 enkelt sammanhängande, dvs "utan hål"
 men går inte in på hur det definieras i $\mathbb{R}^3$)

Kan använda liknande metod som i $\mathbb{R}^2$ för att
 hitta potential

Ex Visa att $\vec{F} = (z, 2y, x+2z)$ är konservativ
 och bestäm en potential.

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 2y & x+2z \end{vmatrix} = \langle 0, -\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial z} z, 0 \rangle = 0.$$

så $\vec{F}$ konservativ enligt sats.

Vill lösa
$$\begin{cases} f_x = z & (i) \\ f_y = 2y & (ii) \\ f_z = x+2z & (iii) \end{cases}$$

En lösning till (i) är $f_0 = xz$ och allmänna lösningen är

$$f(x, y, z) = xz + g(y, z). \quad (*)$$

$$\Rightarrow f_x \underset{(i)}{=} 0 + g_y(x,z) \underset{(ii)}{=} 2y$$

En lösning: $g_0 = y^2$, allmänna lösningen

$$g = g_0 + h(z) = y^2 + h(z)$$

$$\text{Så } f(x,y,z) = xy + g = xz + y^2 + h(z) \quad (\text{iii})$$

$$\Rightarrow f_z \underset{(i)}{=} x + h'(z) \underset{(ii)}{=} x + 2z$$

$$\Rightarrow h'(z) = 2z \Rightarrow h(z) = z^2 + C$$

Så $f = xz + y^2 + z^2 + C$ en potential till $\mathbf{F}$.

Stokes sats 16.8

Låt S vara en yta i $\mathbb{R}^3$ parametriserad av $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$. Låt ∂S vara bilden av randen ∂D till D .

En orientering $\mathbf{n}$ av S ger en orientering av ∂S genom att man går moturs längs ∂S runt $\mathbf{n}$.

Om ∂S har den orienteringen säger man att den är positivt orienterad.



Sats Låt S vara en orienterad yta och antag att dess rand ∂S är en enkel sluten kurva som är positivt orienterad.
Låt $\vec{F}$ vara ett vektorfält med kontinuerliga partiella derivator. Då är

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är ett område och $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ på D kan man också se det som ett vektorfält $\vec{F} = (P, Q, 0) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ på $\mathbb{R}^3$

$$\text{Då blir } \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Green's formel säger att

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

och det kan då formuleras som

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} dA$$

Om man låter $S = \{ (x,y,0) \mid (x,y) \in D \}$ så ger $\vec{n} = \vec{k}$ en orientering och Green's formel för D blir då Stokes formel för S .



Anm:

Man ser på liknande sätt som att $\operatorname{rot} \nabla f = 0$, också att $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbb{G}) = 0$, dvs $\mathbb{F} = \operatorname{rot} \mathbb{G}$ är källfritt.

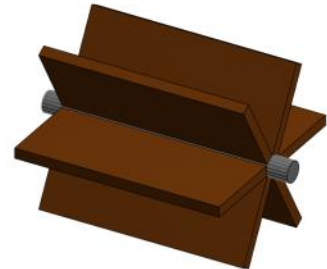
Omvänt gäller t.ex. på $\mathbb{R}^3$ eller "lämpliga" områden $E \subseteq \mathbb{R}^3$ att om $\mathbb{F}$ är källfritt, dvs $\operatorname{div} \mathbb{F} = 0$ så finns ett vektorfält $\mathbb{G}$ s.a.
 $\mathbb{F} = \operatorname{rot} \mathbb{G}$.

Inom fysik är det ett vanligt krav att vektorfält är källfria och det ger då relevanta exempel nä, Stokes sats är tillämpbar.

Geometrisk tolkning av rot $\mathbf{F}$:

Antag att $\mathbf{F}$ är ett hastighetsvektorfält för en vätska.
Placera ut ett skovelhjul med centrum i en punkt (x, y, z)

Hastigheten av hur skovelhjulet snurrar beror på i vilken riktning man placerar rotationsaxeln.

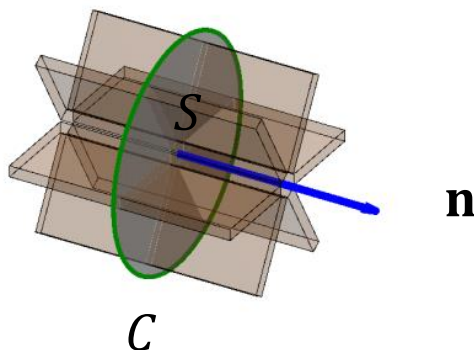


Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är rot $\mathbf{F}$.

Antag att hjulet roterar kring

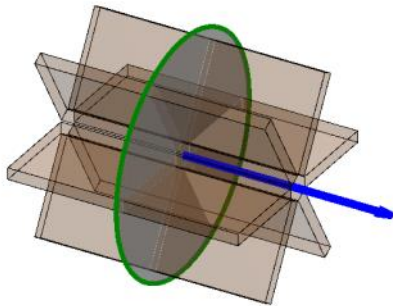
- en axel med riktningsvektor $\mathbf{n}$ (blå)
- och att det följer
- en cirkel C (grön)
- som begränsar
- en yta S (grå)

Då kan man ta $\mathbf{n}$ som normalvektor till S .



Hur snabbt hjulet roterar är proportionellt mot arbetet av $\mathbf{F}$ längs C :

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \{ \text{Stokes sats} \} \\ &= \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}$$



Hastigheten av hjulet är alltså proportionell mot

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Om man delar dubbelintegralen med arean av S och sedan låter radien gå mot 0 så går detta mot $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Detta blir som störst om $\mathbf{n}$ och $\text{rot } \mathbf{F}$ pekar i samma riktning, dvs:

Hjulet snurrar som snabbast om rotationsaxeln är $\text{rot } \mathbf{F}$.

(när storleken på hjulet går mot 0)