

Sammanfattning Föreläsning 21

Rotationen (curl) av ett vektorfält $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ är

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle.$$

$$\text{rot } \nabla f = 0.$$

Omvänt gäller:

Sats Om $\mathbf{F}$ är ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$ och

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

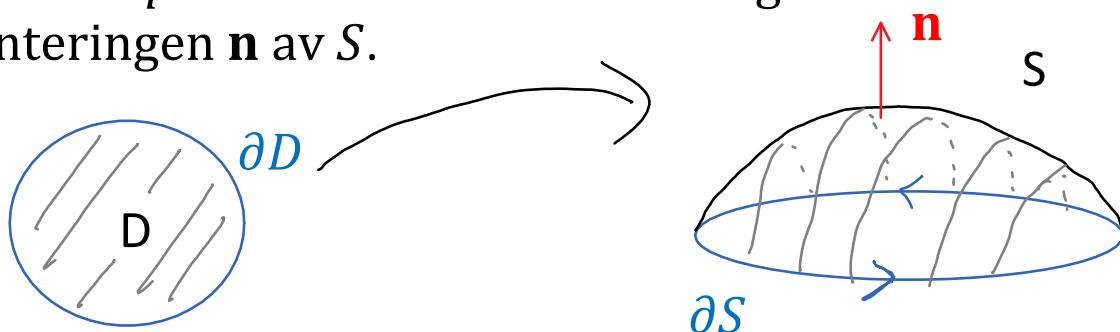
så är $\mathbf{F}$ konservativt, dvs.,

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

för någon funktion f .

Om S är en yta parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ så är dess *rand* ∂S bilden av randen ∂D av D .

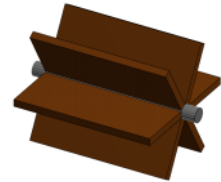
Randen är *positivt orienterad* om den går moturs runt orienteringen $\mathbf{n}$ av S .



Stokes sats S orienterad yta med positivt orienterad rand $C = \partial S$. Då är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

- Motsvarar Greens formel för $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Ger geometrisk tolkning av $\text{rot } \mathbf{F}$:
Om placerar ett (oändligt litet) skovelhjul i (x, y, z) , så snurrar hjulet som snabbast om rotationsaxeln är $(\text{rot } \mathbf{F})(x, y, z)$



Anm: Stokes sats kan användas för att visa satsen om sambandet mellan konservativa vektorfält på $\mathbb{R}^3$ och rotation från förra föreläsningen, se s. 1126.

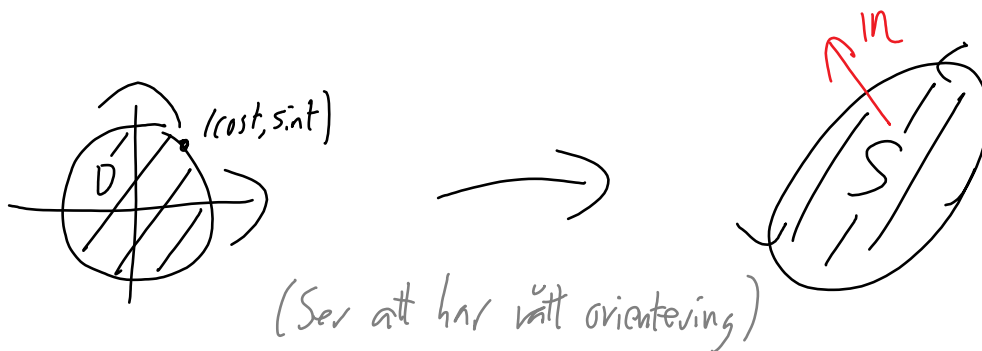
Ex Låt S vara delen av planet $z = 2x$ som ligger över området $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. där orienteringen är i positiv z -riktning.

Verifiera Stokes sats på S för $\mathbf{F} = (-y, x, 5z)$

S parametriseras av $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2x)$, $(x, y) \in D$

och eftersom randen till D kan parametriseras med $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

så parametriseras ∂S med $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \underbrace{2\cos t}_{=2x})$



a) Beräkna VL:

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \sin t, 2\cos t) \cdot \vec{r}'(t) dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 10\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, -2\sin t) dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1} - \underbrace{20 \cos t \sin t}_{=10 \sin(2t)} dt = \\
 &= 2\pi - [-5 \cos(2t)]_0^{2\pi} = 2\pi
 \end{aligned}$$

b) Beräkna HL:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 5z \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 2 \rangle.$$

S ges av $\vec{r}(x, y) = (x, y, 2x) \quad (x, y) \in D$.

$$D: \text{ av } dS = |\vec{r}_x \times \vec{r}_y| dA$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \langle -2, 0, 1 \rangle$$

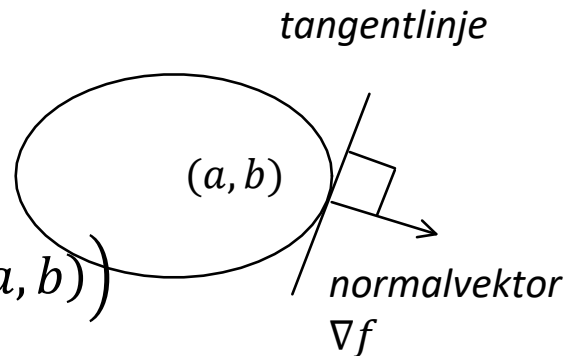
$$\begin{aligned}
 \sum_a \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) dA = \\
 &= \iint_D \langle 0, 0, 2 \rangle \cdot \langle -2, -1, 1 \rangle dA = 2 \iint_D dA = 2 \text{area}(D) = 2\pi.
 \end{aligned}$$

Repetition

Reellvärda funktioner av två variabler

$f(x, y)$ funktion

$f(x, y) = k$
nivåkurva



Gradient $\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b))$

Tangentlinje till nivåkurvan

$$\nabla f(a, b) \cdot \langle x - a, y - b \rangle = 0$$

Riktningsderivata i riktning $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| = 1$)

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{u}$$

Riktning där **växer som mest**

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(a, b)}{|\nabla f(a, b)|}$$

(om $\nabla f(a, b) \neq 0$)

Har också motsvarighet i tre variabler
(tangentplan istället för tangentlinje,
nivåyta istället för nivåkurva osv.)

Tenta 2013-10-21 7) Beräkna tangentplanet och normalen till nivan

$$z \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

i punkten $(1, 1, \frac{2\pi}{3})$

(I uppgiften stod bara $(x, y) = (1, 1)$, men)
har löst ut vad z blir då

Ytan är nivåkurvan $F(x, y, z) = \frac{\pi^2}{6}$

$$\text{där } F(x, y, z) = z \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

$$\frac{d}{dx} \arctan t = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{så enligt kedjeregeln:}$$

$$F_x = z \frac{1}{1+(\sqrt{\frac{x}{y}})^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{x}{y}} = z \frac{1}{1+\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}}$$

$$F_x\left(1, 1, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{6}$$

$$F_y = z \frac{1}{1+\frac{x}{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right) = z \frac{1}{1+\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{y^{3/2}}$$

$$F_y\left(1, 1, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$F_z = 1 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \quad F_z\left(1, 1, \frac{2\pi}{3}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$S_x \quad \nabla F(1, 1, \frac{2\pi}{3}) = \langle \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \rangle.$$

och tangentplanet blir då

$$\nabla F(1, 1, \frac{\pi}{3}) \cdot \langle x-1, y-1, z-\frac{\pi}{3} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \cdot (x-1) - \frac{\pi}{6} (y-1) + \frac{\pi}{4} (z - \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \Leftrightarrow 2(x-1) - 2(y-1) + (3z - \pi) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x - 2y + 3z = \pi \end{array} \right)$$

$f(x, y)$ kan visualiseras med sin graf $z = f(x, y)$.

Tangentplan till grafen av en funktion $f(x, y)$ i en punkt (a, b)

$$z = \underbrace{f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)}_{=L(x, y)}$$

z -värdet $L(x, y)$ kallas **lineariseringen** av f kring (a, b) och om f är deriverbar kan den användas för att approximera f nära (a, b) .

Grafen $z = f(x, y)$ är en nivåyta $F(x, y, z) = 0$ för $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ och tangentplanet till grafen av f = tangentplanet till nivåytan av F

Tenta 2015-01-02 } Använd linearisering för
att approximera $\arcsin\left(\frac{2.02^2}{4.95}\right) - \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$

(I tentan formulerat som Använd approximationsatsen för alt... Har inte kallat det approx. satsen, men detta som menas)

Om låter $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$ så är det vi ska
approximera $f(2.02, 4.95) - f(2, 5)$.

Linearisera f kring $(2, 5)$:

$$\frac{d}{dt} \arcsin t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{så}$$

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \frac{2x}{y}$$

$$f_x(2,5) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\frac{9}{25}}}_{=\frac{3}{5}}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{3}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

$$f_y(2,5) = \frac{1}{3/5} \cdot \left(-\frac{4}{5^2}\right) = -\frac{4}{15}$$

$$\begin{aligned} \text{Så } L(x,y) &= f(2,5) + f_x(2,5)(x-2) + f_y(2,5)(y-5) \\ &= \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{3}(x-2) - \frac{4}{15}(y-5) \end{aligned}$$

$$\text{Så } \arcsin\left(\frac{2.02^2}{4.95}\right) - \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) = f(2.02, 4.95) - f(2,5)$$

$$\approx L(2.02, 4.95) - L(2,5) =$$

$$= \cancel{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)} + \frac{4}{3} \cdot 0.02 - \frac{4}{15}(-0.05) - \cancel{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$= \frac{0.4 + 0.2}{15} = \frac{0.6}{15} = \frac{1}{25}$$

Svar: Skillnaden är ca $\frac{1}{25} = 0,04$.

(Verkligt värde 0,0417...)

Gränsvärden

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ om " $f(x,y)$ hur nära L som helst så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b) "

Strategier för att beräkna gränsvärden:

- Om sammansättning av elementära funktioner och är *definierad* (dvs. delar inte med 0 eller liknande), kan sätta in $(x,y) = (a,b)$

Exempel $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \sin\left(\frac{\pi x^2}{y}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

- Förkorta/förenkla så hamnar i förra fallet.

Exempel

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4 - x^5}{x^2 + y^2} &= \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x((y^2 - x^2)(y^2 + x^2))}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(y^2 + x^2) = 0 \end{aligned}$$

- Försök skriva det som en sammansättning med en funktion av en variabel.

Exempel $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{3 \ln(x+y^2)}{x+y^2-1}$

$$\frac{3 \ln(x+y^2)}{x+y^2-1} = h(f(x, y)) \text{ där } h(t) = \frac{3 \ln(t)}{t-1} \text{ och } f(x, y) = x + y^2$$

Eftersom $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y) = 1$ och $\lim_{t \rightarrow 1} h(t) = 3$
 (standardgränsv. alt. l'Hospitals, alt def. av derivata för $3 \ln(t)$ i $t=1$)
 så $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+y^2)}{x+y^2-1} = 3$.

- *Instängningsregeln*: Om $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$

och

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y)$$

så är

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L$$

Strategi för att visa att gränsvärde *inte* existerar

- Om $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ så måste $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\mathbf{r}(t)) = L$
 för *alla* kurvor $\mathbf{r}(t)$ med $\mathbf{r}(t_0) = (a, b)$.

Om då får olika gränsvärden, t.ex., längs räta linjer genom (a, b) så finns gränsvärdet *inte*

Tenta 2016-01-04 1 a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$$

Kan testa t.ex. längs rätta linjer att gränsvärdet blir 0.
Av typen "0/0". Verkar inte gå att förenkla eller
skriva som sammansättning. Försöker med instängningsregeln.

$$x^3 y^3 \leq \overset{\geq 0}{x^2} \cdot \overset{\geq 0}{|x \cdot y^3|} \leq (x^2 + y^2) \cdot |xy^3|$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{mellansteget:} \\ \dots \leq x^2 |xy^3| + y^2 |xy^3| = \dots \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \leq |xy^3| = h(x,y)$$

På samma sätt:

$$f(x,y) = -|xy^3| \leq \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Om vi låter } g(x,y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} \text{ blir alltså}$$

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y) \text{ och}$$

$$\text{eftersom } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y)$$

$$\text{så blir enl. instängningsregeln } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = 0$$