

Lokala extremvärden

Om $f(x, y)$ har lokalt max/min i (a, b) så är (a, b) en **kritisk punkt**, dvs $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$

Modelfall:

$$x^2 + y^2 \quad \text{lokalt min i } (0,0)$$

$$-x^2 - y^2 \quad \text{lokalt max i } (0,0)$$

$$-x^2 + y^2, x^2 - y^2 \quad \text{sadelpunkt i } (0,0), \text{ dvs kritisk punkt men varken lokalt max eller min}$$

Andraderivatatestet:

(a, b) en kritisk punkt till $f(x, y)$

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

$$\underline{D > 0}: \quad \text{a) } f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow \text{lokalt min}$$

$$\text{b) } f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow \text{lokalt max}$$

$$\underline{D < 0}: \quad \text{sadelpunkt}$$

Hur komma ihåg? Jämför med modellfallen

Tenta 2014-08-21 5)

Bestäm lokala max/min och sadelpunkter till

$$f(x,y) = 3 - 8x^2 - \frac{1}{xy} - \ln(xy^2)$$

Def. mängd av f : $xy \neq 0, yx^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0, y \neq 0$

$$f = 3 - 8x^2 - \frac{1}{xy} - \ln x - 2 \ln |y|$$

$$f_x = -16x + \frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x} \quad f_y = \frac{1}{xy^2} - \frac{2}{y}$$

$$\text{Kritiska punkter: } \begin{cases} f_x = -16x + \frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x} = 0 & (1) \\ f_y = \frac{1}{xy^2} - \frac{2}{y} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \quad (x, y \neq 0)$$

$$\text{Sätter in i (1): } -16x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 16x \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{16} \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{4}, \quad x: \text{def. mnd till } f \Rightarrow x > 0 \text{ s\u00e5 } x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{2x} = 2.$$

Kritiskt punkt: $(\frac{1}{4}, 2)$

$$f_{xx} = -16 - 2 \cdot \frac{1}{x^3 y} + \frac{1}{x^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{x^2 y^2}$$

$$f_{yy} = -\frac{2}{xy^3} + \frac{2}{y^2}$$

$$D\left(\frac{1}{4}, 2\right) = \begin{vmatrix} -16 - 2 \cdot \frac{1}{4^3 \cdot 2} + \frac{1}{4^2} & -16/4 \\ -16/4 & -\frac{8}{8} + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -64 & -4 \\ -4 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$= 32 - 16 = 16 > 0.$$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{4}, 2\right) = -64 < 0$$

$$\text{s\u00e5 } D\left(\frac{1}{4}, 2\right) > 0, \quad f_{xx}\left(\frac{1}{4}, 2\right) < 0$$

Svar: $(\frac{1}{4}, 2)$ \u00e4r ett kritiskt punkt, lok. max.

Globala extremvärden

Om $f(x, y)$ kontinuerlig på sluten begränsad mängd D så har f globalt max och min på D .

Om f deriverbar kan bestämmas genom att jämföra värdena i:

- 1) Kritiska punkter inuti D
- 2) Punkter på randen till D . Kan preciseras om parametriserar randen med kurvor:
 - a. Kritiska punkter längs randkurvorna
 - b. "Hörn", dvs ändpunkter till randkurvorna.

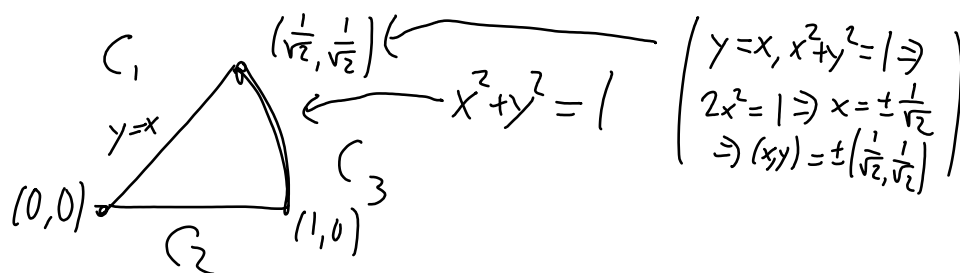
Ex Bestäm globala max och min av $x^2 - y$
när (x, y) ligger i området
 $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, 0 \leq y \leq x$



1) Kritiska punkter i D :
$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = -1 = 0 \end{cases} \text{ ingen lösning!}$$

Inga kritiska punkter i D .

2) Parametrisera randen med 3 kurvor:



a) Kritiska punkter längs randkurvor:

$$C_1: \{(t,t) \mid 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

$$g_1(t) = f(t,t) = t^2 - t \quad g_1'(t) = 2t - 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{g_1\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}}$$

$$C_2 = \{(t, 0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

$$g_2(t) = f(t, 0) = t^2 \Rightarrow t = 0 \quad (0,0) \text{ "hörn" kommer med i steg b).}$$

på C_3 , kan lösa ut: $x = \sqrt{1-y^2}$

$$C_3 = \{(\sqrt{1-y^2}, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

$$g_3(y) = f(\sqrt{1-y^2}, y) = 1-y^2-y \quad g_3'(y) = -2y-1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

ej på C_3 !

b) "Hörn", dvs ändpunkter till kurvorna:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{1-3/2}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f(1, 0) = 1$$

$$f(0, 0) = 0$$

Svar: max 1 ; (1, 0) och
min $-\frac{1}{4}$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Kurvor i rummet

Kurva C parametriserad av $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$,
 $a \leq t \leq b$

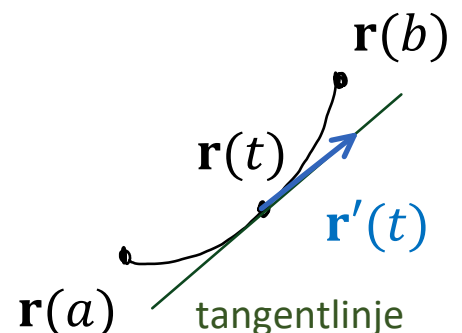
Tangentvektor $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$
ger riktningsvektor för tangentlinjen genom $\mathbf{r}(t)$:
 $L(s) = \mathbf{r}(t) + s\mathbf{r}'(t)$

Längd $\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$

Kurvintegral av funktion f :

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

$(ds = |\mathbf{r}'(t)| dt)$



Dubbelintegraler

$$f(x, y) \geq 0:$$

$\iint_D f(x, y) dA = \text{volymen av området under grafen } z = f(x, y)$

Kan beräknas med *upprepad integral*, t.ex.,

$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}$ så

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$$

och motsvarande om gränser i x beror på y .

Polära koordinater

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Integration över "*polär rektangel*" D :

$$a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$$

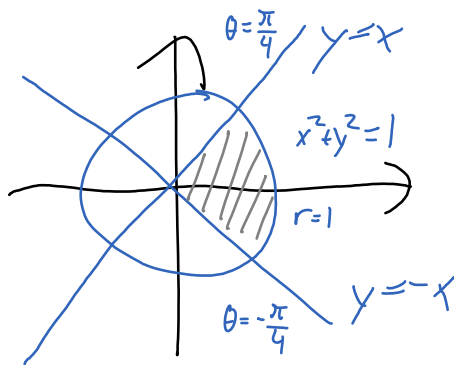
$$\underline{dA = r d\theta dr = r dr d\theta:}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

Tenta 2015-10-26 5)

Beräkna $\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2} dA$

där D är cirkelsektorn $x^2+y^2 \leq 1$, $-x < y < x$



D i polära koordin.

$$0 \leq r \leq 1, \quad -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4.$$

$$\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2} dA = \int_0^1 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{r \cos \theta}{1+r^2} d\theta dr = \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} \left[\sin \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} dr$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2} dr = \left\{ \frac{r^2}{1+r^2} = \frac{1+r^2-1}{1+r^2} = 1 - \frac{1}{1+r^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r^2} \right) dr = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[r - \arctan(1) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Trippelintegraler

$$\iiint_E dV = \text{volym av området } E$$

Upprepade integraler liknande som i två variabler, om t.ex.

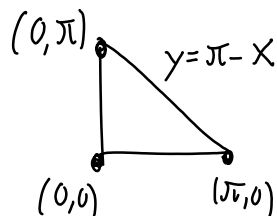
$$\begin{aligned} E &= \{ (x, y, z) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq z \leq b(y), e(y, z) \leq x \leq f(y, z) \} \\ \iiint_E g(x, y, z) dV &= \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} \int_{e(y, z)}^{f(y, z)} g(x, y, z) dx \, dz \, dy \end{aligned}$$

(Gick ej igenom på föreläsningen)

15.7.12 Beräkna $\iiint_E \sin y \, dV$,

där E är området under planet $z=x$ och över triangeln i xy -planet med hörn $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0,\pi)$.

Triangeln D :



Linjen mellan $(0,\pi)$ och $(\pi,0)$
skär y -axeln i π och har lutning $\frac{0-\pi}{\pi-0} = -1$
Så ges av $y = \pi - x$.

Da blir $D = \{(x,y) \mid 0 \leq \pi \leq x, 0 \leq y \leq \pi - x\}$

och $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq \pi \leq x, 0 \leq y \leq \pi - x, 0 \leq z \leq x\}$.

$$\text{Så } \iiint_E \sin y \, dV = \int_0^\pi \int_0^{\pi-x} \int_0^x \sin y \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{\pi-x} \sin y \cdot x \, dy \, dx = \int_0^\pi x \left[-\cos y \right]_0^{\pi-x} dx =$$

$$= \int_0^\pi x (1 - \cos(\pi-x)) \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} \text{partiell integration} & \\ F = x & f = F' = 1 \\ g = 1 - \cos(\pi-x) & G = x + \sin(\pi-x) \end{array} \right\}$$

$$= \left[x(x + \sin(\pi-x)) \right]_0^\pi - \int_0^\pi 1(x + \sin(\pi-x)) \, dx$$

$$= \pi^2 - \left[\frac{x^2}{2} + \cos(\pi-x) \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

Cylindriska koordinater

Polära koordinater i xy -planet:

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$\underline{dV = r \, dr \, d\theta \, dz}$$

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

$$(0 \leq \rho$$

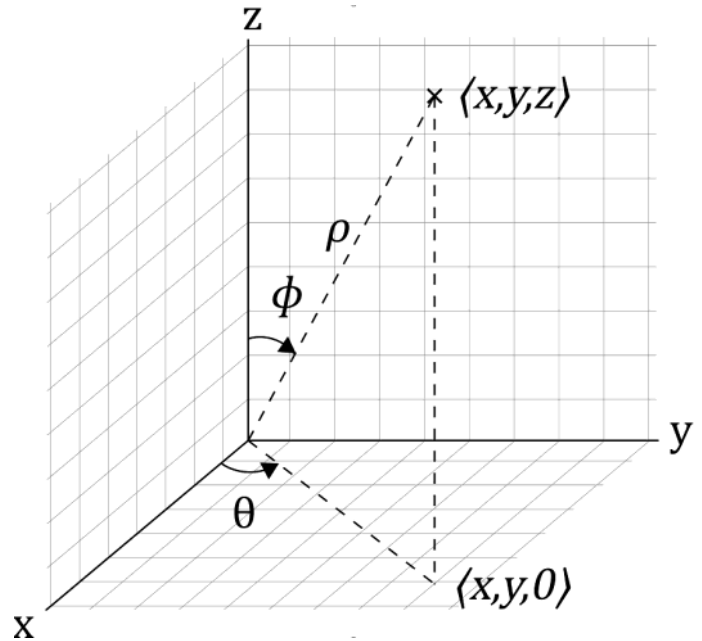
$$0 \leq \phi \leq \pi,$$

$$\text{oftast } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{el. } -\pi \leq \theta \leq \pi)$$

Integration:

$$\underline{dV = \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho}$$



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"
© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Ex Beräkna masscentrum av området

$$E = \{ (x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0 \}.$$

$$\text{Masscentrum } (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right)$$

Området symmetriskt i speglingar i x eller y-led
så $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$.

E ges i sfäriska koord. av:

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq \rho^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq \rho \leq 2. \quad (\rho \geq 0)$$

$$z \geq 0 \Leftrightarrow \rho \cos \phi \geq 0 \Leftrightarrow \cos \phi \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\phi \in [0, \pi])$$

Inga mer villkor, så alla θ , dvs $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Så enligt $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi$, får

$$m = \iiint_E dV = \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho = 2\pi \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_1^2 \rho^2 \left[-\cos \phi \right]_0^{\pi/2} d\rho = 2\pi \int_1^2 \rho^2 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2\pi \cdot 7}{3}$$

$$M_z = \iiint_E z \, dV = \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho \cos \phi \, \rho^2 \sin \phi \, d\theta d\phi d\rho =$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\rho^3 \cos \phi \sin \phi}_{= \frac{\sin(2\phi)}{2}} d\theta d\phi d\rho = 2\pi \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \rho^3 \frac{\sin(2\phi)}{2} d\phi d\rho$$

$$= 2\pi \int_1^2 \rho^3 \left[-\frac{\cos(2\phi)}{4} \right]_0^{\pi/2} d\rho = \pi \int_1^2 \rho^3 \cdot \frac{1}{2} d\rho = \pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{M_z}{m} \right) = \\ &= \left(0, 0, \frac{15\pi/4}{14\pi/3} \right) = \left(0, 0, \frac{45}{56} \right) \end{aligned}$$