

Kommentarer inför tentan

- Listan med *kursmål* på hemsidan specificerar vad ni förväntas kunna och vad tentan kommer testa på.
- Uppgifterna i *övningsprogrammet* testar på *alla* dessa målen.
- Duggorna i Maple TA testar på många, men *långt från alla* målen.
- En del gamla tentor innehåller uppgifter om krökningsradie, det ingår inte i kursen i år.

Kurvintegraler av vektorfält

C kurva, parametrisering $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, $\mathbf{F}$ vektorfält

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Om $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$, skrivs också

$$\int_C P dx + Q dy$$

dvs. om $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ så är

$$dx = x'(t) dt \text{ och } dy = y'(t) dt.$$

2014-08-21 7)

Beräkna $\int_C xy dx - 7x^2 dy$

där C är kurvan $y = \sqrt{x}$ från $(0,0)$ till $(4,2)$.

C par. av $(x,y) = (t, \sqrt{t})$ $0 \leq t \leq 4$.

Så $dx = 1 \cdot dt$ $dy = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

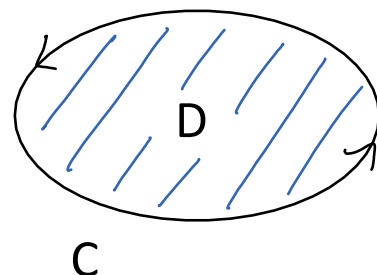
och $\int_C xy dx - 7x^2 dy = \int_0^4 t \cdot \sqrt{t} dt - 7t^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt =$

$= - \int_0^4 \frac{5}{2} t^{3/2} dt = \left[t^{5/2} \right]_0^4 = 4^{5/2} = 2^5 = 32.$

(Kunde också param. (t^2, t) , $0 \leq t \leq 2$)
hade släppt kvadratrötter

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D . Då är

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$



Konservativa vektorfält

$\mathbf{F}$ konservativt om $\mathbf{F} = \nabla f$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

På $\mathbb{R}^2$ (eller enkelt sammanhängande områden)

$\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservativt precis om $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

"derivatan av första komponenten m.a.p. andra variabeln
= derivatan av andra komponenten m.a.p. första variabeln"

Rotation av vektorfält på $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle.$$

På $\mathbb{R}^3$ (eller enkelt sammanhängande områden i $\mathbb{R}^3$):

$\mathbf{F}$ konservativt precis när $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Tenta 2014-10-27 8) (något modifierad)

Beräkna $\int_C 2xz \, dx + 2yz \, dy + (x^2 + y^2) \, dz$

där C är kurvan $x = 1 - \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin^2 t$

$$0 \leq t \leq \pi/2.$$

Kolla om $\mathbf{F} = \langle 2xz, 2yz, x^2 + y^2 \rangle$ konservativt:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & 2yz & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = \langle 2y - 2y, -2x + 2x, 0 - 0 \rangle = \mathbf{0}.$$

Bestämmer potentiäl:

$$\begin{cases} f_x = 2xz & (1) \\ f_y = 2yz & (2) \\ f_z = x^2 + y^2 & (3) \end{cases}$$

(1) lösning $f = x^2 z + g(y, z)$

Sätter in i (2): $f_y = g_y = 2yz \Rightarrow g = y^2 z + h(z)$
 $\Rightarrow f = x^2 z + g = x^2 z + y^2 z + h(z)$.

Sätter in i (3): $f_z = x^2 + y^2 + h'(z) = x^2 + y^2$.
 Kan ta $h = 0$ så $f = (x^2 + y^2)z$.

Da blir $\int_C 2xz dx + 2yz dy + (x^2 + y^2) dz = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} =$
 $= f(\mathbf{r}(\frac{\sqrt{e}}{2})) - f(\mathbf{r}(0)) = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 2$.

Ytintegraler på yta S , parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$

$$\iint_S f(x, y, z) dS \text{ där } dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

Speciellt, om S grafen till $f(x, y)$: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$

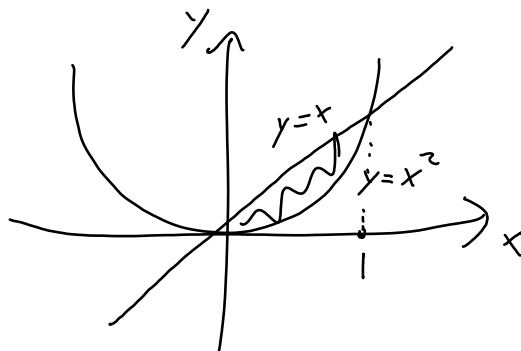
$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle \text{ (formelsamling)}$$

och då

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

16.6.42 Beräkna arean av delen av

konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger över området som begränsas av $y = x$ och $y = x^2$.



Ytan är grafen $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
 $(x, y) \in D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

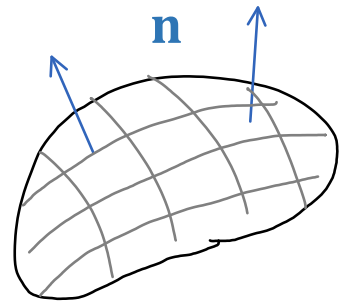
$$\begin{aligned}
 S_z \text{ arean är } \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \sqrt{2} dy dx = \\
 &= \sqrt{2} \int_0^1 x - x^2 dx = \sqrt{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{6}
 \end{aligned}$$

Flöde genom orienterad yta S

parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, orientering $\mathbf{n}$

$$d\mathbf{S} = \pm(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$$

(+ om $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ pekar i samma riktning som $\mathbf{n}$, - annars)



Flöde genom S :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$$

16.7.22 Beräkna flödet av $\mathbf{F} = \langle z, y, x \rangle$

genom spiraltrappan S par, av

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \sin v, v \rangle \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq \pi.$$

med orientering uppåt.

$$\mathbf{r}_u = \langle \cos v, \sin v, 0 \rangle$$

$$\mathbf{r}_v = \langle -u \sin v, u \cos v, 1 \rangle$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = \langle \sin v, -\cos v, u(\cos^2 v + \sin^2 v) \rangle = \langle \sin v, -\cos v, u \rangle$$

Pos. z -komponent u , så rätt orientering.

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(u \cos v, u \sin v, v) \cdot \langle \sin v, -\cos v, u \rangle dA =$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \langle v, u \sin v, u \cos v \rangle \cdot \langle \sin v, -\cos v, u \rangle dv du$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi v \sin v - u \underbrace{\sin v \cos v}_{= \frac{\sin(2v)}{2}} + u^2 \cos v dv du$$

$$\left(\text{partial int.: } \int_0^\pi v \sin v dv = \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos v) dv = -v \cos v + \sin v + C \right)$$

$$= \int_0^1 \left[-v \cos v + \sin v + \frac{u \cos(2v)}{4} + u^2 \sin v \right]_{v=0}^{v=\pi} du$$

$$= \int_0^1 \pi + \cancel{\frac{u}{4}} - \cancel{\frac{u}{4}} du = \pi.$$

$$\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle: \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergenssatsen

S randen till område $E \subseteq \mathbb{R}^3$, orientering pekar ut från E

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

Stokes sats

Yta S har rand $C = \partial S$, orienterad moturs kring orientering av S

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

16.9.12 Beräkna flödet av $\mathbf{F} = \langle x^4, -x^3z^2, 4xy^2z \rangle$

ut ur området som begränsas av cylindern
 $x^2 + y^2$ och planen $z = x + 2$ och $z = 0$,

Om E är området som begränsas av ytan ovan:
 som begränsas av ytan S så är

$$\begin{aligned} \text{flödet} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_E (4x^3 + 4xy^2) dV \\ &= \iiint_E 4x(x^2 + y^2) dV. \end{aligned}$$

E ges i cylindriska koord. av $0 \leq r \leq 1$,
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $0 \leq z \leq 2 + r \cos \theta$

så eftersom $dV = r \, dz \, dr \, d\theta$:

$$\iiint_E 4x(x^2+y^2) \, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2+r\cos\theta} 4r\cos\theta \cdot r^2 \cdot r \, dz \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{4r^4 \cos\theta \cdot (2+r\cos\theta)}_{= 8r^4 \cos\theta + 4r^5 \cos^2\theta} \, dr \, d\theta =$$
$$= \int_0^1 \left[8r^4 \cos\theta + 2r^5 \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \, dr =$$

$$= \int_0^1 4\pi r^5 \, dr = 4\pi \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$