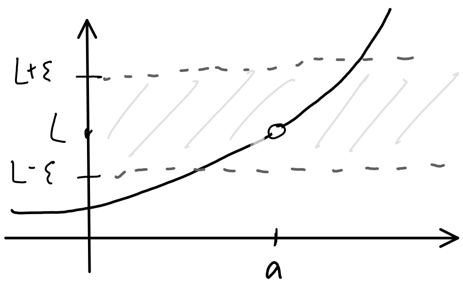
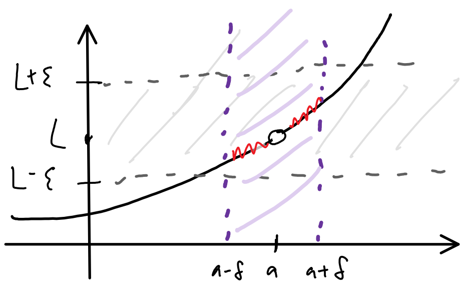
Sammanfattning Föreläsning 2
Funktioner av två och tre variabler, f(x,y) eller f(x,y,z)
Har **definitionsmängd** (där definierade)
och **värdemängd** (värden som antar).

En funktion f(x,y) av två variabler kan studeras med **grafen** z=f(x,y) eller **nivåkurvor** f(x,y)=k för olika värden på k.

En funktion f(x,y,z) av tre variabler
kan studeras med **nivåytor** f(x,y,z)=k för olika värden på k,
men **grafen** w=f(x,y,z) i fyra dimensioner, kan *inte* ritas!

Formell definition av gränsvärde i en variabel:
"för varje $\varepsilon > 0$*, så finns* $\delta > 0$ s.a. om $|f(x) - L| < \varepsilon$
om $|x-a| < \delta$ *."*





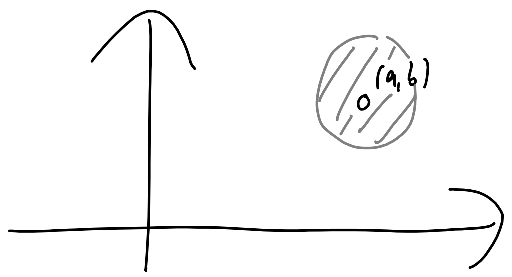
Gränsvärden och kontinuitet 14.2

Har motsvarande def. som i en variabel:

Def En funktion $f(x,y)$ har gränsvärdet L när (x,y) går mot (a,b), vilket skrivs

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

om för varje $\varepsilon > 0$ så finns $\delta > 0$ s.a.
om $0 < |(x,y)-(a,b)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ så är
$|f(x,y) - L| < \delta$.



för varje ε, finns cirkelskiva radie δ s.a. $L-\varepsilon < f(x,y) < L+\varepsilon$ där.

---

samma informella beskrivning som i en variabel:
$f(x,y)$ är hur nära L som helst, så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b).

(eller lite mer oprecist:
$f(x,y)$ närmar sig L när (x,y) närmar sig (a,b))

Får likande räkneregler som i en variabel:

Om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$

så gäller:

a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x,y) + g(x,y)\big) = L + M$

b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L \cdot M$

c) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ om $M \neq 0$

d) Om $h(t)$ funktion av en variabel s.a.

$\lim_{t\to L} h(t) = K$ så är

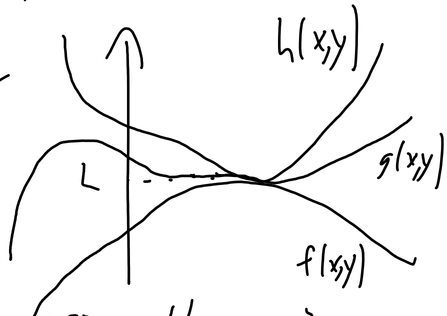
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h\big(f(x,y)\big) = K.$$

e) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

f) Om $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ och

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$ så är

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$



(instängningsregeln, squeeze theorem)

Ex Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ om det existerar

---

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$ (enl. a), b) och e))

så kan inte direkt använda c).

Kan förkorta: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} =$

$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-y^2 = 0$ (enl. a), b) och e))

Ex Visa att $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2+y^2} = 0$

$$0 \le \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2+y^2} = (x-1)^2 \underbrace{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}}_{\le 1} \le (x-1)^2$$

och $\lim_{(x,y)\to(1,0)} 0 = 0 = \lim_{(x,y)\to(1,0)} (x-1)^2$

så därför är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2+y^2} = 0$ enligt

instängningsregeln.

Ex Låt $g(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}$. Beräkna $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

om det existerar.

Låt $f(x,y) = x^2+y^2$ och $h(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$

$g(x,y) = h(f(x,y))$, och eftersom $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$

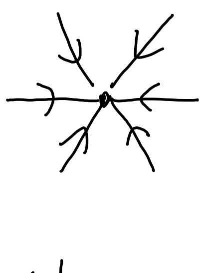
så får man enligt A)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

(standardgränsvärde, derivatan av e^t i $t=0$ är 1, alt. l'Hôpitals regel)

Anm: Om $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ så måste gränsvärdet vara lika med L om närmar sig (a,b) längs alla linjer genom (a,b).

Sådana linjer ges av $\mathbb{r}(t) = (a+kt,\ b+lt)$



(a,b)

Ger metod att se när gränsvärden inte existerar.

Ex Beräkna $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$ om det existerar.

Prövar först längs x-axeln: $r(t) = (t, 0)$

$$f(t,0) = \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = 1 \to 1 \quad \text{då } t \to 0$$

och längs y-axeln:

$$f(t,0) = \frac{0 - t^2}{0 + t^2} = -1 \to -1 \quad \text{då } t \to 0$$

Gränsvärdet finns då inte eftersom får olika gränsvärden längs olika linjer.

Obs Denna strategi kan bara användas för att se att gränsvärden inte existerar. Även om får samma gränsvärde längs alla räta linjer, kan hända att gränsvärdet inte existerar, se t.ex.

Ex 3 i avsn. 14.2

Kontinuitet

Def $f(x,y)$ är kontinuerlig i (a,b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Från räknereglerna för gränsv. får man att om $f(x,y)$ och $g(x,y)$ är kontinuerliga och $h(t)$ är kontinuerlig så är

$$f+g, \quad f\cdot g, \quad h(f(x,y))$$

kontinuerliga och om $g(x,y) \neq 0$ så är f/g kontinuerlig.

Ex a) x och $1+y^2$ är kont.

b) $\dfrac{x}{1+y^2}$ är kont. (kvot av kont. funktioner)

c) $e^{\frac{x}{1+y^2}}$ är kont. (sammansättning av kont. fkt med kont. fkt $h(t)=e^t$)

Ex Avgör om följande funktioner är kont. i $(0,0)$:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

b) $$g(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

c) $$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

---

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

så f är kont. i $(0,0)$.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = 1 \neq 0 = g(0,0)$$

så g är <u>inte</u> kont. i $(0,0)$.

(men g skulle bli kont. om istället def. $g(0,0)=1$)

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$ existerar ej,

så h är <u>inte</u> kont. i $(0,0)$.