

Sammanfattning Föreläsning 3

- Gränsvärde av funktioner $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ om

" $f(x,y)$ kommer hur nära L som helst,
så länge (x,y) är tillräckligt nära (a,b) "
(informell definition)

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)g(x,y) = L \cdot M$
o.s.v.,

- $f(x,y)$ kontinuerlig i (a,b) om $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Partiella derivator, 14.3

Partiella derivator = fixera alla variabler utom en, och derivera som funktion av en variabel.

Def $f(x,y)$ funktion. Låt y vara fix och def. $g(x) = f(x,y)$
Då är den partiella derivatan av f med avseende på x

$$f_x(x,y) = g'(x)$$

och på samma sätt om x fix och $h(y) = f(x,y)$ så är
 $f_y(x,y) = h'(y)$.

Ex Beräkna $f_x(1,2)$ och $f_y(1,2)$ där $f(x,y) = e^x y$.

$$\text{Låt } g(x) = f(x,2) = e^x. \quad g'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f_x(1,2) = g'(1) = e$$

$$h(y) = f(1,y) = ey, \quad h'(y) = e$$

$$f_y(1,2) = h'(2) = e.$$

Man använder också följande beteckningar

$$f_x = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$$

$$f_y = f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

Högre derivator:

Man kan sedan derivera f_x och f_y m.a.p.
 x och y och få

$$(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x, (f_y)_y \text{ osv.}$$

Man använder beteckningar

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} \text{ osv.}$$

Clairaut's sats Om f_{xy} och f_{yx} båda existerar
och är kontinuerliga nära (a,b) så är

$$f_{yx} = f_{xy}$$

Bevis Appendix F, använder medelvärdessatsen.

Högre ordningens partiella derivator kan t.ex. beskriva olika fysikaliska fenomen med partiella diff. ekvationer.

T.ex., Laplace's ekvation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
beskriver värmeledning

Ex Visa att $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ löser Laplace's ekvation.

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 - 3xy^2) = 3x^2 - 3y^2$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 3y^2) = 6x$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - 3xy^2) = -6xy$$

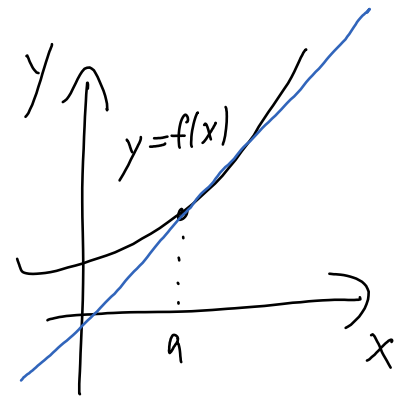
$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (-6xy) = -6x$$

$$\text{så } f_{xx} + f_{yy} = 6x - 6x = 0$$

Motivation tangentplan

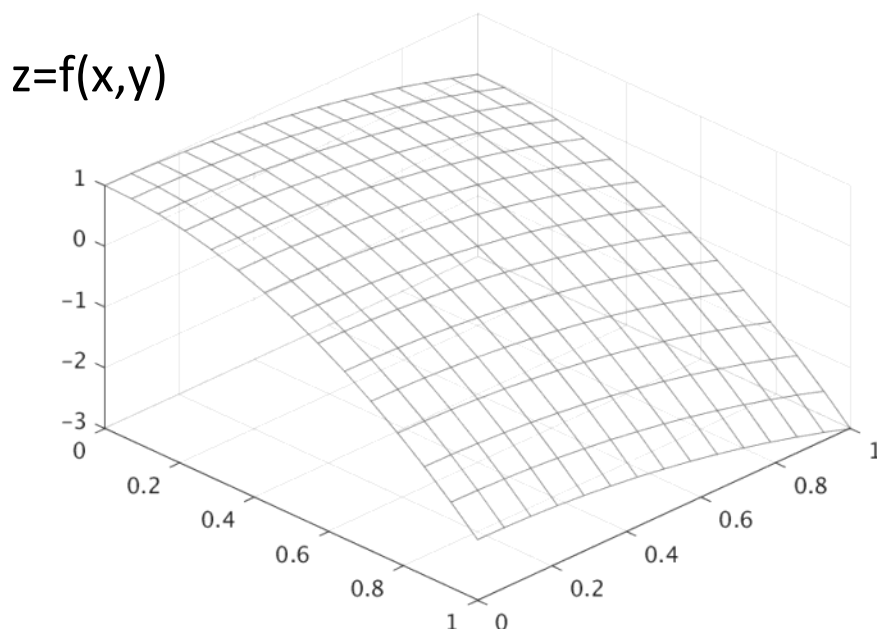
Tangentplan till en graf $z=f(x,y)$

Tangentlinje till graf $y=f(x)$ kring a är
"bästa approximation av f nära a
med en linje"



tangentlinje $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

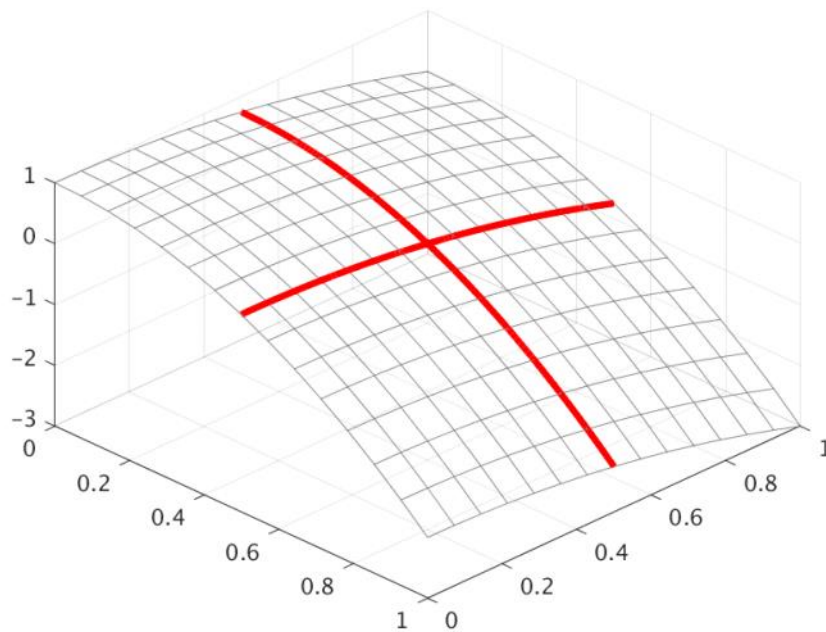
Vill göra motsvarande i två variabler:
Tangentplan till graf $z=f(x,y)$ kring (a,b) är
"bästa approximation av f nära (a,b)
med ett plan"



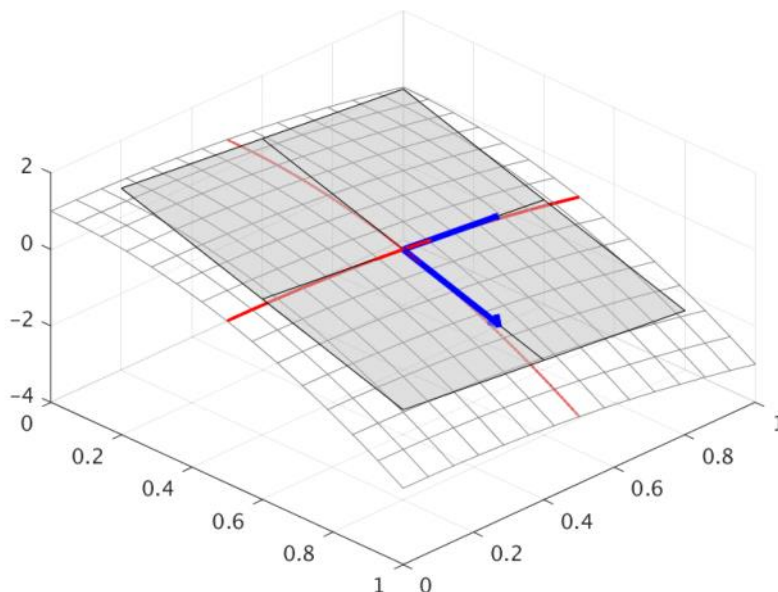
Fixera en punkt (a,b) . Får två naturliga kurvor genom (a,b) på grafen $z=f(x,y)$ om fixerar a eller b :

$$r_1(x) = (x, b, f(x, b))$$

$$r_2(y) = (a, y, f(a, y))$$



Tangentvektorerna $r_1'(a)$ och $r_2'(b)$ bör kunna användas för att ge bra approximation av f längs r_1 och r_2 .



Tangentplanet
till $z=f(x,y)$ i
 $(0.5, 0.5)$

Tangentplan M.3

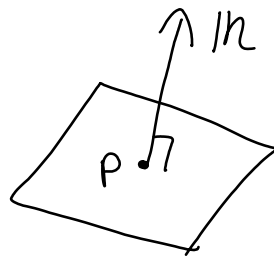
Tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ vid (a, b) är det plan som går genom $(a, b, f(a, b))$ och som innehåller riktningsvektorer $r_1'(a)$ och $r_2'(b)$, där $r_1(x, b) = (x, b, f(x, b))$ och $r_2(a, y) = (a, y, f(a, y))$.

Inte så klart vad är i konkreta fall från det.
Skall härleda formel.

Påminnelse (Stewart, 12.4 & 12.5)

- a) Ett plan med normalvektor $n = (A, B, C)$ genom en punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ ges av

$$n \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



- b) Ett plan som innehåller två riktningsvektorer $u = (u_1, u_2, u_3)$ och $v = (v_1, v_2, v_3)$ har normalvektor

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, -u_3 v_1 + u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$



Vi härleder nu en formel för tangentplanet:

$$r_1'(a) = (1, 0, f'_x(a,b))$$

$$r_2'(b) = (0, 1, f'_y(a,b))$$

normalvektor enl. b): $n = r_1'(a) \times r_2'(b) =$

$$= \begin{vmatrix} \overset{0}{i} & \overset{0}{j} & k \\ 1 & 0 & f'_x(a,b) \\ 0 & 1 & f'_y(a,b) \end{vmatrix} = (-f'_x(a,b), f'_y(a,b), 1)$$

så enl. a) ges tangentplanet av:

$$n \cdot (x-a, y-b, z-f(a,b)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-f'_x(a,b)(x-a) - f'_y(a,b)(y-b) + 1 \cdot (z-f(a,b)) = 0 \Leftrightarrow$$

Detta ger följande

Formel för tangentplanet av ytan $z=f(x,y)$

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b).$$

z -värdet man får från tangentplanet bör vara en bra approximation av f nära (a,b) .

Det kallas lineariseringen av f kring (a,b) :

$$L(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b).$$

Ex Beräkna tangentplanet till $z = f(x,y)$
i $(3,4)$ där $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

och använd lineariseringen av f för
att approximera $f(3,01, 2.98)$

$$f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \quad f_x(3,4) = \frac{3}{5}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \quad f_y(3,4) = \frac{4}{5}$$

Tangentplan: $z = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= L(x,y) \text{ linearisering.}}$

$$\begin{aligned} f(3.01, 3.98) &\approx L(3.01, 3.98) = 5 + \frac{3}{5} \cdot 0.01 - \frac{4}{5} \cdot 0.02 \\ &= 5 - \frac{0.05}{5} = 4.99 \end{aligned}$$

Verkligt värde $f(3.01, 3.98) = 4.990040$

I detta exempel, bra approximation.

Nästa föreläsning mer om när L är bra approximation.