

Sammanfattning Föreläsning 4

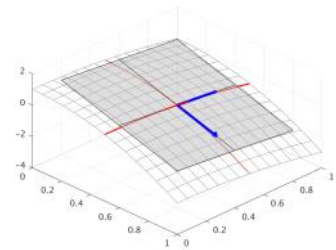
- Partiella derivator: $f_x(x,y) = f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$

"se y som konstant och derivera m.a.p. x "

och $f_y(x,y) = f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y)$

- Tangentplan för $z=f(x,y)$ kring (a,b)

$$z = \underbrace{f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)}_{= L(x,y) \text{ linearisering av } f.}$$



- Maple TA startar idag kl 13:00, stänger mån 18/9 kl 18:00
 - Ping Pong ->
 - Innehåll ->
 - Dugga 1 ->
 - (Läs informationen)
 - Öppna extern sida

Differentierbarhet 14.4

Påminni: 1 en variabel, f deriverbar i a om

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existerar.}$$

Lineariseringen är $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Kan skriva $f(x) = L(x) + \varepsilon(x)(x - a)$

$$\text{om } \varepsilon(x) = \frac{f(x) - L(x)}{x - a}$$

$$\text{För att } \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$$

enl. def. av derivata.

Sats: Om $f'(a)$ existerar så är $L(x)$
en bra approximation av $f(x)$

Annorlunda i två variabler:

Ex Låt $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0, \quad f(0,0) = 0$$

så $L(x,y) = 0$.

$$f(t,t) - L(t,t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

när $t \rightarrow 0$ så L är inte en bra approximation av f nära $(0,0)$ även om $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$ existerar!

Senare resultat kommer bara gälla om L är en bra approximation.
Inför därför följande:

Def f är differentierbar eller deriverbar i (a,b) om $f'_x(a,b)$ och $f'_y(a,b)$ existerar och man kan skriva:

$$f(x,y) = \overbrace{f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)}^{L(x,y)} + \varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_2(y-b)$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ då $(x,y) \rightarrow (a,b)$.

Speciellt: $f(x,y) - L(x,y) \rightarrow 0$ då $(x,y) \rightarrow (a,b)$

så f i ex. ovan är differentierbar

Sats Om $f'_x(x,y)$ och $f'_y(x,y)$ existerar och
är kontinuerliga nära (a,b)
så är f deriverbar i (a,b)

Beviset använder medelvärdesatsen för
derivator i en variabel, se Appendix F.

(Första gången deriverbarhet dykar upp:
kedjeregeln i flera variabler)

Kedjeregeln, 14.5

Påminn Kedjeregeln i en variabel:

Om $y=f(x)$ och $x=g(t)$ är deriverbara

$$\text{så är } \frac{d}{dt} f(g(t)) = f'(g(t)) g'(t).$$

$$\text{Användbara uttryck: } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Kedjeregeln; två variabler (enklaste varianten):

Låt $z = f(x, y)$, $x = g(t)$ och $y = h(t)$ vara deriverbara. Då är

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = f'_x(g(t), h(t)) g'(t) + f'_y(g(t), h(t)) h'(t)$$

alt:
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Ex Antag att f är deriverbar och $f'_x(2, 2) = 7$ och $f'_y(2, 2) = -3$.

Låt $u(t) = f(t^3 + t, 2t)$. Vad är $u'(1)$?

Låt $g(t) = t^3 + t$ och $h(t) = 2t$ s.a. $u(t) = f(g(t), h(t))$.

$$g'(t) = 3t^2 + 1 \quad g'(1) = 4 \quad h'(t) = 2, \quad h(1) = 2$$

$$\begin{aligned} u'(1) &= f'_x(g(1), h(1)) \cdot g'(1) + f'_y(g(1), h(1)) h'(1) \\ &= 7 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 22 \end{aligned}$$

Bövis: Enl. deriverbarhet av f

med $(x,y) = (g(s), h(s))$ och $(a,b) = (g(t), h(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{f(g(s), h(s)) - f(g(t), h(t))}{s-t} &= \\ &= f'_x(g(s), h(s)) \frac{g(s) - g(t)}{s-t} + f'_y(g(s), h(s)) \frac{h(s) - h(t)}{s-t} \\ &\quad + \varepsilon_1 \cdot \frac{g(s) - g(t)}{s-t} + \varepsilon_2 \frac{h(s) - h(t)}{s-t} \end{aligned}$$

Om låter $s \rightarrow t$, får kedjeregeln.

Variant av kedjeregeln:

$z = f(x,y)$, $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$ deriverbara.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

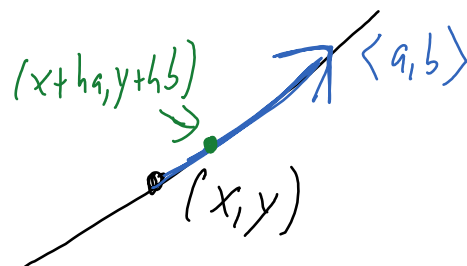
Riktningssderivator och gradienter, 14.6

Partiella derivator är derivator längs linjer när x el. y konstant, dvs linjer med riktningsvektor $i = (1, 0)$ el. $j = (0, 1)$.

Andra riktningar?

Def Riktningssderivatan (directional derivative) av $f(x, y)$ i riktningen $u = \langle a, b \rangle$, där u är en enhetsvektor ($\sqrt{a^2 + b^2} = 1$), är

$$D_u f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ha, y+hb) - f(x, y)}{h}$$



Partiella derivator är riktningssderivator i riktningarna i och j .

Följande def. kommer vara användbar framöver:

Def Gradienten av $f(x, y)$ är

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle.$$

("nabla f")

Sabs Om f är deriverbar så är

$$D_u f = \nabla f \cdot u.$$

Beris: Låt $g(h) = f(x+ha, y+hb)$.

Enligt kedjeregeln:

$$g'(h) = f'_x(x+ah, y+bh) \cdot a + f'_y(x+ah, y+bh) \cdot b =$$

$$\text{så } g'(0) = \underbrace{f'_x(x, y)}_{= D_u f} \cdot \underbrace{a + f'_y(x, y) \cdot b}_{= \nabla f \cdot u}$$

Ex Beräkna $D_u f(1,1)$ där $u = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$
och $f(x,y) = x^2 y$.

$$\nabla f = \langle 2xy, x^2 \rangle \quad \nabla f(1,1) = \langle 2, 1 \rangle$$

$$D_u f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot u = \langle 2, 1 \rangle \cdot \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Påminnelse (Stewart, 12.3)

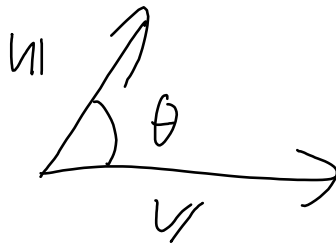
$u = \langle u_1, u_2 \rangle$, $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ vektorer

a) skalärprodukten är $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

(obs: ett tal, inte en vektor!)

b) längden av u är $|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

c) $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$, θ vinkeln mellan u och v .



d) u vinkelrät (ortogonal) mot $v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$
(följer av c)

(Detta kommer vi använda på fredagens föreläsning)