

Sammanfattning Föreläsning 5

- $f(x,y)$ **deriverbar** eller **differentierbar** i (a,b) om $f_x(a,b)$ och $f_y(a,b)$ existerar och kan skriva

$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}_{L(x,y)} + \varepsilon_1(x,y)(x-a) + \varepsilon_2(x,y)(y-b)$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ $d(x,y) \rightarrow (a,b)$

- **Sats:** Om $f_x(x,y)$ och $f_y(x,y)$ existerar och är kontinuerliga nära (a,b) så är $f(x,y)$ deriverbar i (a,b)
- **Kedjeregeln i två variabel** (enklaste varianten)
Om $z=f(x,y)$ och $x=g(t)$ och $y=h(t)$ är deriverbara så är

$$\frac{d}{dt} [f(g(t), h(t))] = f_x(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_y(g(t), h(t)) \cdot h'(t)$$

$$\text{alt: } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

- **Gradient** $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$

- **Riktningsderivata** i riktning $u = \langle a, b \rangle$:
(enhetsvektor $\sqrt{a^2+b^2}=1$)

$$D_u f(x,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ha, y+hb) - f(x,y)}{h} = \nabla f(x,y) \cdot u \quad (\text{kedjeregeln})$$

Påminnelse (Stewart, 12.3)

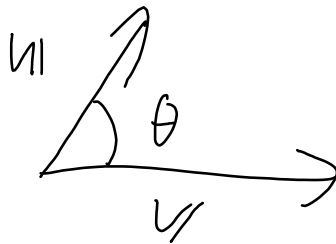
$u = \langle u_1, u_2 \rangle$, $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ vektorer

a) skalärprodukten är $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

(obs: ett tal, inte en vektor!)

b) längden av u är $|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

c) $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$, θ vinkeln mellan u och v .



d) u vinkelrät (ortogonal) mot $v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$
(följer av c)

Sats Riktungsderivatan $D_u f(x, y)$ är som störst när u pekar i samma riktning som $\nabla f(x, y)$, dvs när $u = \frac{\nabla f(x, y)}{|\nabla f(x, y)|}$.

Alltså: f växer som mest om rör sig från (x, y) i riktningen $\frac{\nabla f(x, y)}{|\nabla f(x, y)|}$

Beris: $D_u f(x,y) = u \cdot \nabla f(x,y) \stackrel{=1}{=} |u| \cdot |\nabla f(x,y)| \cos \theta$
där θ vinkeln mellan u och $\nabla f(x,y)$.

$|\nabla f(x,y)| \cos \theta$ som störst när $\cos \theta = 1$, dvs
när $\theta = 0$ s.a. u och $\nabla f(x,y)$ pekar i
samma riktning.

Ex Avgör i vilken riktning som $f(x,y) = x^2 y$
växer som mest i $(1,1)$.

$$\nabla f = \langle 2xy, y^2 \rangle \quad \nabla f(1,1) = \langle 2, 1 \rangle$$

så f växer som mest i $(1,1)$ i riktningen

$$u = \frac{\nabla f(1,1)}{|\nabla f(1,1)|} = \frac{\langle 2, 1 \rangle}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Ann: I princip allt vi pratat om:

- partiella derivator
- tangentplan och linearisering
- differentierbarhet
- kedjeregeln
- riktningsderivata
- gradient

har naturliga generaliseringar till
tre eller fler variabler.

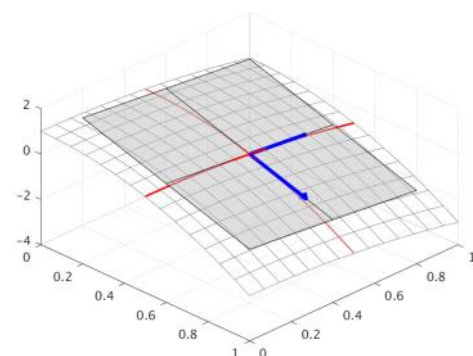
Tangentplan till nivåytor 14.6

Påminnelse

Definition Tangentplanet till $z=f(x,y)$ vid $(x,y) = (a,b)$ är det plan som går genom $(a,b,f(a,b))$ och som innehåller riktningsvektorerna $r_1'(a)$ och $r_2'(b)$ till kurvorna i grafen $r_1(x) = (x, b, f(x,b))$ och $r_2(y) = (a, y, f(a,y))$.

Det ges av formeln:

$$\langle -f'_x(a,b), -f'_y(a,b), 1 \rangle \cdot \langle x-a, y-b, z-f(a,b) \rangle = 0$$



En graf $z=f(x,y)$ är ett specialfall av en nivåyta:

$$F(x,y,z) = k \quad \text{där}$$

$$F(x,y,z) = z - f(x,y) \quad \text{och} \quad k = 0.$$

Vill nu det. tangentplan till allmän nivåyta.

Om $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ är en kurva i en nivåyta $F(x,y,z) = k$ som går genom $r(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ så

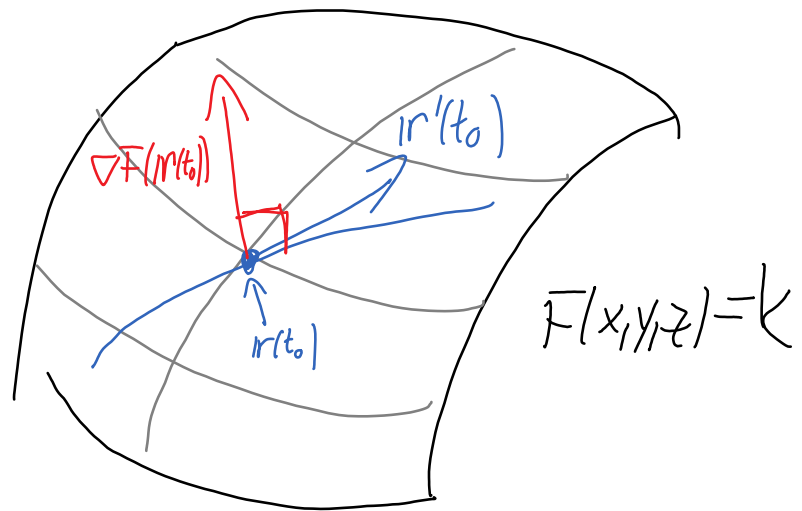
$$F(x(t), y(t), z(t)) = k.$$

Om derivet av m.a.p. t och använder kedjeregeln:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Slutsats: $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ är vinkelrät mot alla tangentvektorer till kurvor $F(x, y, z) = k$ genom (x_0, y_0, z_0) .



Man inför därför följande

Definition Tangentplanet till en nivåyta $F(x, y, z) = k$ i en punkt (x_0, y_0, z_0) där $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ är

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0.$$

Tangentplanet till $F(x,y,z)=k$ i (x_0, y_0, z_0) är precis det plan som innehåller tangentvektorena till alla kurvor i $F(x,y,z)=k$ genom (x_0, y_0, z_0) .

(Att detta bestämmer tangentplanet bygger på att det finns sådana kurvor, vilket man kan visa med implicita funktionsatsen som vi inte går igenom)

Obs: Om $F(x,y,z)=z-f(x,y)$ så är nivåytan $F(x,y,z)=0$ samma som grafen $z=f(x,y)$.

Eftersom $\nabla F(x,y,z)=(-f'_x, -f'_y, 1)$ så blir det samma tangentplan om vi ser ytan som nivåyta eller som graf.

Ex Bestäm tangentplanet till sfären $x^2+y^2+z^2=1$ i punkten (a,b,c) där $a^2+b^2+c^2=1$.

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \quad \nabla F(a,b,c)=\langle 2a, 2b, 2c \rangle$$

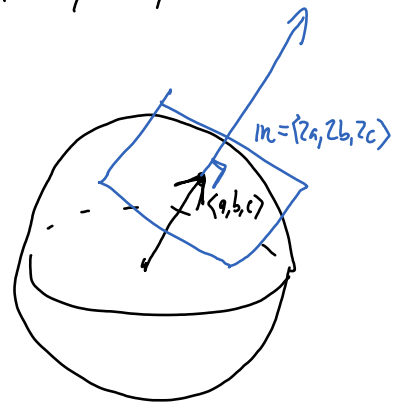
Tangentplan:

$$\nabla F(a,b,c) \cdot \langle x-a, y-b, z-c \rangle = 0$$

$$2a(x-a) + 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0$$

$$ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

(nu gått igenom allt inför duggan)



Lokala extremvärden 14.7

Def $f(x,y)$ har ett lokalt maximum i (a,b) om
(*) $f(x,y) \leq f(a,b)$

för (x,y) nära (a,b) (dvs det gäller för (x,y)
i någon cirkelskiva kring (a,b))

$f(x,y)$ har ett globalt eller absolut maximum
i (a,b) om (*) gäller för alla (x,y) i
definitionsmängden till f .

lokala och globala/absoluta minimum definieras
analogt från den omvända olikheten

$$f(x,y) \geq f(a,b).$$

ett lokalt extremvärde är ett lokalt minimum eller
maximum.

Ex $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ har ett lokalt och globalt minimum
i $(0,0)$ eftersom $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ för alla (x,y) .

Påminnelse I en variabel, om f deriverbar
och f har lokalt extremvärde i a
så är $f'(a) = 0$.

Sats Om f har ett lokalt extremvärde i (a, b)
och $f'_x(a, b)$ och $f'_y(a, b)$ existerar så är
 $f'_x(a, b) = 0$ och $f'_y(a, b) = 0$.

Bevis: $h(x) = f(x, b)$ har lok. extremvärde i a ,
så $h'(a) = 0$, och per def. $f'_x(a, b) = h'(a) = 0$.
 $f'_y(a, b) = 0$ på motsvarande sätt.

Def Om $f'_x(a, b) = 0 = f'_y(a, b)$ säger man att f har
en kritisk punkt eller stationär punkt i (a, b) .

Alla lokala extremvärden är alltså kritiska
punkter (om part. derivator existerar),
men kritiska punkter är inte alltid extremvärden:

Ex Låt $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Dess kritiska punkter är

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = -2y = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad (x,y) = (0,0).$$

$$\text{Eftersom } f(t,0) = t^2 > 0 \quad (t \neq 0)$$

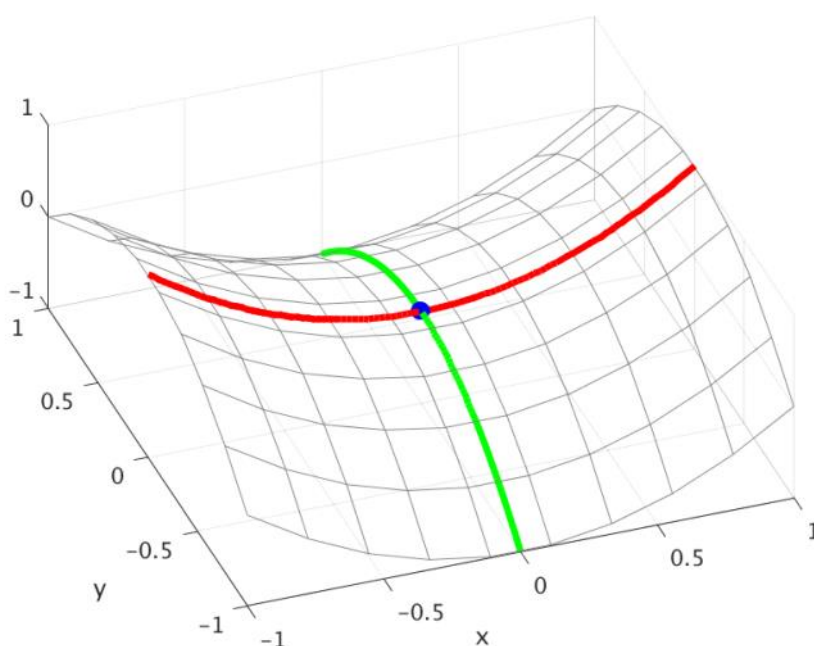
$$\text{och } f(0,t) = -t^2 < 0 \quad (t \neq 0)$$

finns punkter hur nära $(0,0)$ som helst
där $f(x,y)$ är både större och mindre än $f(0,0)$

Så f har en kritisk punkt i $(0,0)$ som varken
är lokalt max eller min.

Sådana punkter kallas sadelpunkter

Grafen har formen av en "sadel"



x-axeln: lokalt min

y-axeln: lokalt max

Alla kritiska punkter är inte lokala extremvärden.
Hur avgöra när de är det?

1 en variabel: Om $f'(a)=0$ och

a) $f''(a) < 0$ så har $f(x)$ lok. max i $x=a$.

b) $f''(a) > 0$ så har $f(x)$ lok. min i $x=a$.

(c) $f''(a)=0$ ger inte information om $x=a$ är
ett lok. extremvärde till $f(x)$

Fallet med två variabler på tisdag.