Sammanfattning Föreläsning 5

- $f(x,y)$ **deriverbar** eller **differentierbar** i (a,b) om $f_x(a,b)$ och $f'_y(a,b)$ existerar och kan skriva

$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}_{L(x,y)} + \varepsilon_1(x,y)\cdot(x-a) + \varepsilon_2(x,y)(y-b)$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ då $(x,y) \to (a,b)$

- **Sats:** Om $f_x(x,y)$ och $f_y(x,y)$ existerar och är kontinuerliga nära (a,b) så är $f(x,y)$ deriverbar i (a,b)

- **Kedjeregeln i två variabel** (enklaste varianten)
  Om z=f(x,y) och x=g(t) och y=h(t) är deriverbara så är

$$\frac{d}{dt}\left(f(g(t),h(t))\right) = f_x(g(t),h(t))\cdot g'(t) + f_y(g(t),h(t))\cdot h'(t)$$

alt: $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- **Gradient** $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$

- **Riktningsderivata** i riktning $u = \langle a, b \rangle$:

(enhetsvektor $\sqrt{a^2+b^2} = 1$)

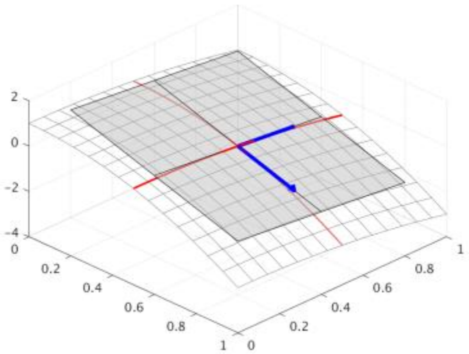
$$D_u f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+ha, y+hb) - f(x,y)}{h} = \nabla f(x,y) \cdot u$$

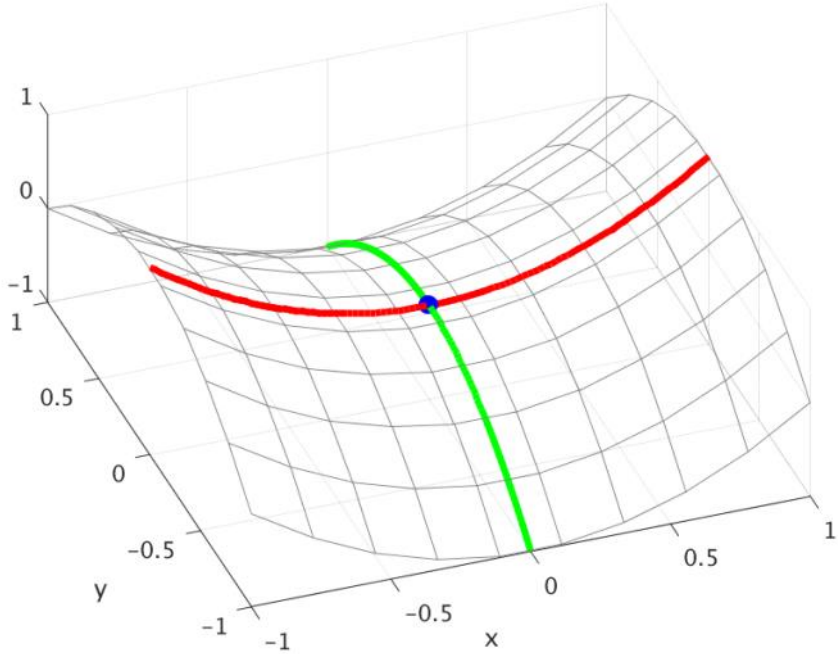
(kedjeregeln)

Definition *Tangentplanet* till z=f(x,y) vid (x,y) = (a,b) är det plan som går genom (a,b,f(a,b)) och som innehåller riktningsvektorerna $\mathbf{r}_1'(a)$ och $\mathbf{r}_2'(b)$ till kurvorna i grafen $\mathbf{r}_1(x)=(x,b,f(x,b))$ och $\mathbf{r}_2(y)=(a,y,f(a,y))$.

Det ges av formeln:

$$\langle -f_x'(a,b), -f_y'(a,b), 1\rangle \cdot \langle x-a, y-b, z-f(a,b)\rangle = 0$$





Grafen till

$z = x^2 - y^2$