

Sammanfattning Föreläsning 5

- Sats Riktungsderivatan $D_{u_1} f(x, y)$ är som störst när $u_1 = \frac{\nabla f(x, y)}{|\nabla f(x, y)|}$
- *Tangentplanet* till nivåytan $F(x, y, z) = k$ i punkten (x_0, y_0, z_0) ges av
$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$
- Sats Punkter (x_0, y_0) med *lokala* extremvärden (lokala max/min) till $f(x, y)$ är *kritiska punkter*, dvs. $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$.

Maple TA:

I Dugga 1, Uppgift 4 och 5, ska stå

$f(x, y, z) = \dots$

(inte $f(x, y) = \dots$)

Kriterium för lokala extremvärden 14.7

Om $f(x,y)$ har lok. extremvärde i (a,b) , så är (a,b) en kritisk punkt, dvs $f_x(a,b)=0=f_y(a,b)$.
Däremot behöver inte alla kritiska punkter vara lokala extremvärden (sadelpunkter). Hur avgöra?

I en variabel: Om $f'(a)=0$ och

a) $f''(a) < 0$ så har $f(x)$ lok. max i $x=a$.

b) $f''(a) > 0$ så har $f(x)$ lok. min i $x=a$.

(c) $f''(a)=0$ ger inte information om $x=a$ är ett lok. extremvärde till $f(x)$

Sats Antag att de partiella derivatorna av ordning 2 till $f(x,y)$ är kontinuerliga nära (a,b) och att

$$f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b) \quad (\text{dvs } (a,b) \text{ en kritisk punkt}).$$

$$\text{Låt } D = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$$

a) Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) > 0$ så har f ett lok. min. i (a,b)

b) Om $D > 0$ och $f_{xx}(a,b) < 0$ så har f ett lok. max i (a,b)

c) Om $D < 0$ är (a,b) varken lok. max eller lok. min till f (dvs (a,b) är en sadelpunkt)

Eftersom $f_{xy} = f_{yx}$ (Clairaut's sats)

så är $D = \det H$, där H är

Hessianmatrisen $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

Beviset går ut på att reducera till andraderivata-testet längs väta linjer genom (a,b) , se s. 953.

För att komma ihåg vilket av villkoren som ger vilken slutsats kan man jämföra med följande modellfall:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ lok. min i $(0,0)$

$$D = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0 \quad f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$

b) $f(x,y) = -x^2 - y^2$ lok. max i $(0,0)$

$$D = (-2) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = 4 > 0 \quad f_{xx}(0,0) = -2 < 0$$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ sadelpunkt i $(0,0)$

$$D = 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = -4 < 0$$

Ex Bestäm de kritiska punkterna till

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

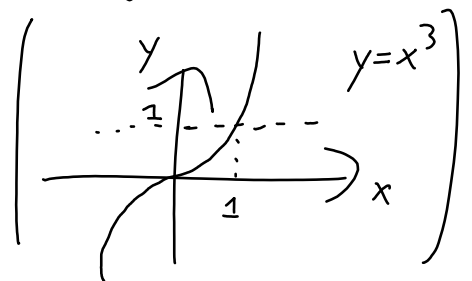
och avgör ifall de är lok. max./min. eller
sadelpunkter.

Kritiska punkter:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} y^4 = y \\ x = y^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} y=0 \text{ eller} \\ \text{kan dela med} \\ y \text{ i båda ekv.} \end{matrix} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} y=0 \text{ el. } 1=y^3 \\ x=y^2 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} y=0 \text{ el. } y=1 \\ x=y^2 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{matrix} (x,y) = (0,0) \\ \text{el. } (x,y) = (1,1) \end{matrix}$$



Undersöker kritiska punkter:

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yy} = 6y$$

$$\begin{aligned} \underline{(0,0)}: \quad D(0,0) &= \det H(0,0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-3) \cdot (-3) = -9 < 0 \end{aligned}$$

så $(0,0)$ en sadelpunkt

$$\underline{(1,1)}: \quad D(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 > 0$$

$f_{xx}(1) = 6 > 0$ så $(1,1)$ ett lokalt minimum

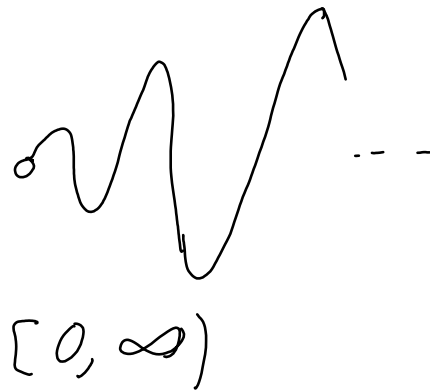
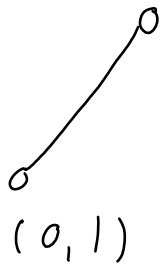
Det finns en generalisering till fler variabler som bygger på s.k. egenvärden till Hessiamatrisen.

Egenvärden ingår i "Matematisk överbryggningskurs"

Globala extremvärden 14.7

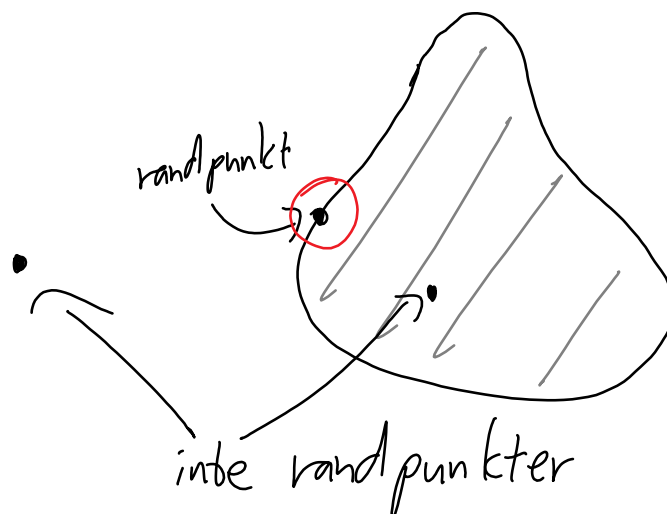
I en variabel, om $f(x)$ kontinuerlig på slutet begränsat intervall $[a, b]$ så har $f(x)$ globalt max och min där.

Motsvarande inte sant på t.ex. öppna eller obegränsade intervall:



Motsvarighet i två variabler (till slutet, begränsad)

Def (a, b) är en randpunkt (boundary point) till en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ om varje cirkelskiva kring (a, b) innehåller både punkter i D och punkter som inte är i D .



Randpunkter till $D_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ är $\{x^2 + y^2 = 1\}$
— || — $D_2 = \{x^2 + y^2 < 1\}$ är också $\{x^2 + y^2 = 1\}$

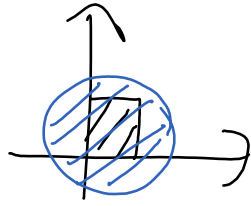


Def En mängd är slutet om den innehåller alla sina randpunkter.

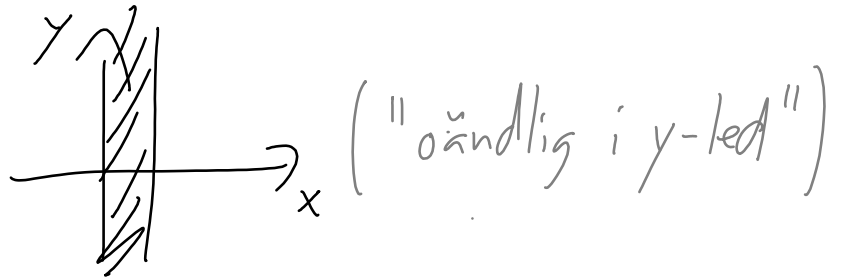
-
- Ex • $D_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ är slutet eftersom den innehåller sina randpunkter $\{x^2 + y^2 = 1\}$
- $D_2 = \{x^2 + y^2 < 1\}$ är inte slutet eftersom den inte innehåller randpunkterna $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

Def En mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är begränsad om den är innehållen i någon cirkelskiva

Ex • $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ är begränsad



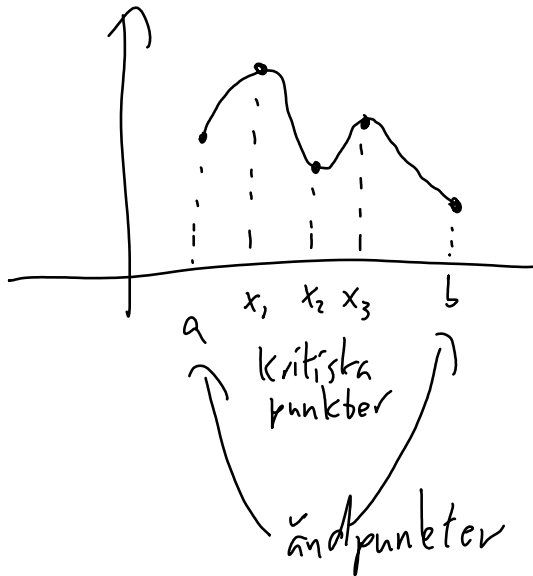
• $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ är ej begränsad.



Sats Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$ och D är sluten och begränsad, då har f globalt max och min på D .

("djupt resultat" bygger på fundamentala egenskaper hos de reella talen)

Påminnelse Om $f(x)$ deriverbar på slutet intervall $[a, b]$ så har f globalt max och min på $[a, b]$ och de kan bestämmas genom att jämföra funktionsvärdena $f(x)$ ändpunkter $x=a$ och $x=b$ och kritiska punkter $f'(x)=0$.



a, x_1, x_2, x_3, b
mögliga punkter
för extremvärden

(här f max i x_1 , min i b)

Om $f(x,y)$ har ett globalt max i (a,b) så är det antingen ett lokalt max eller en randpunkt.

Metod! För att bestämma globala maximum och minimum för f en deriverbar funktion på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D sluten begränsad

Kandidater till globala max och min:

1) Kritiska punkter till f i D .

2) Randpunkter till D .

Om man parametriserar randpunkterna till D med kurvor kan man precisera kandidaterna i 2):

2.1) Kritiska punkter när man ser f som funktion av en variabel längs randkurvor

2.2) Hörn, dvs. ändpunkter till randkurvorna.

Max och min till f får man då genom att jämföra funktionsvärdena i 1, 2.1 och 2.2.