LMA017, Föreläsning 8, 14/9

Sammanfattning Föreläsning 7

- **Andraderivatatestet för lokala extremvärden**
  f(x,y) kontinuerliga partiella derivator ordning 2,
  låt D = $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$.

  Om $f'_x(a,b) = 0 = f'_y(a,b)$ *(dvs* (a,b) *en kritisk punkt)* och

a) D > 0 och $f_{xx}(a,b)$ > 0, då är (a,b) ett lokalt min
b) D > 0 och $f_{xx}(a,b)$ < 0, då är (a,b) ett lokalt max
c) D < 0, då är (a,b) en sadelpunkt

Randpunkter till en mängd D är punkter (x,y) i $\mathbb{R}^2$ s.a. varje cirkelskiva kring (x,y) innehåller både punkter från D och utanför D

D är **sluten** om den innehåller alla sina randpunkter

D är **begränsad** om den är innehållen i någon cirkelskiva

Sats Om f(x,y) är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är sluten och begränsad, då har f ett globalt max och min på D.

Metod för att bestämma max och min till f(x,y),
där f(x,y) deriverbar på D $\subseteq \mathbb{R}^2$, D sluten och begränsad:

Max och min till f får man genom att jämföra funktionsvärdena i

1) Kritiska punkter till f i D
2) Randpunkter till D

   Detta kan preciseras om parametriserar randen med kurvor:

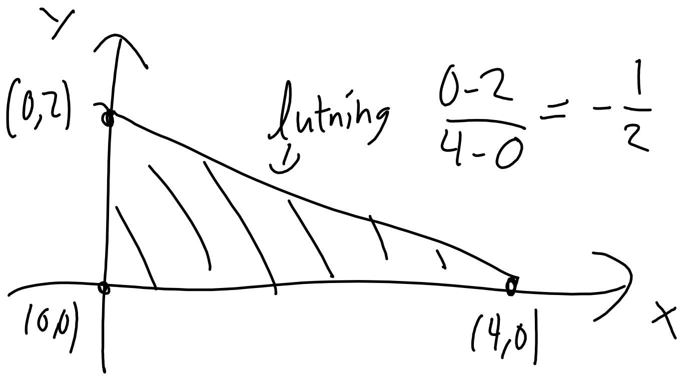
   2.1) Kritiska punkter när ser f som funktion av en variabel längs randkurvor

   2.2) Hörn, dvs. ändpunkter till randkurvorna

Ex Beräkna globala max och min till

$$f(x,y) = x+y-xy \quad \text{på det slutna}$$

triangulära området med hörn i $(0,0)$, $(4,0)$ och $(0,2)$



lutning $\frac{0-2}{4-0} = -\frac{1}{2}$ $\qquad y = 2 - \frac{x}{2}$

Området slutet och begränsat, kan använda metoden från förra föreläsningen.

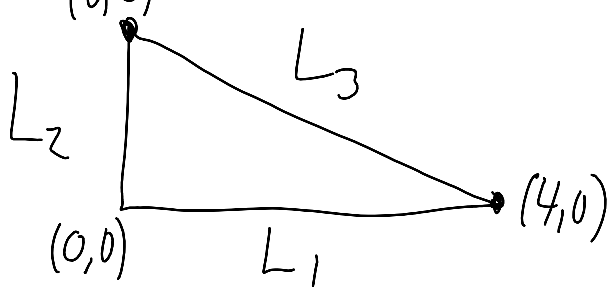
1) Kritiska punkter i D:

$$\begin{cases} f_x = 1-y = 0 \\ f_y = 1-x = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1,1)$$

(innanför triangeln)

Kandidat: $\boxed{f(1,1) = 1+1-1 = 1}$

2) Parametriserar randen:



$L_1 = \{(x,0) \mid 0 < x < 4\}$

$L_2 = \{(0,y) \mid 0 < y < 2\}$

$L_3 = \{(x, 2-\frac{x}{2}) \mid 0 < x < 4\}$

2.1) Kritiska punkter på randkurvor:

$\underline{L_1:}$ $g_1(x) = f(x,0) = x \quad 0 < x < 4.$

$g_1'(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ inga kritiska punkter.

$\underline{L_2:}$ $g_2(y) = f(0,y) = y \quad 0 < x < 2$

$g_2'(y) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ inga kritiska punkter.

$\underline{L_3:}$ $g_3(x) = f(x, 2-\frac{x}{2}) = x + 2 - \frac{x}{2} - x\left(2 - \frac{x}{2}\right) =$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 2$$

Krit. punkter: $g_3'(x) = x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$y = 2 - \frac{x}{2} = \frac{5}{4}$

$$\boxed{f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) = g_3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 2 = \frac{7}{8}}$$

2.2) Hörnpunkter $\boxed{f(0,0) = 0}$ $\boxed{f(4,0) = 4,}$ $\boxed{f(0,2) = 2}$

$\underline{\text{Globalt max:}}$ $4 \quad ; \quad (x,y) = (4,0)$

$\underline{\text{Globalt min:}}$ $0 \quad ; \quad (x,y) = (0,0)$

Optimering under bivillkor, Lagrangemultiplikatorer 14.8

Vill lösa följande problem:

Beräkna maximum av $4x^2+4y$ när (x,y) ligger på enhetscirkeln $x^2+y^2=1$.

En möjlighet: Parametrisera enhetscirkeln $(x,y)=(\cos t, \sin t)$ och hitta max av

$$f(t) = 4\cos^2 t + 4\sin t.$$

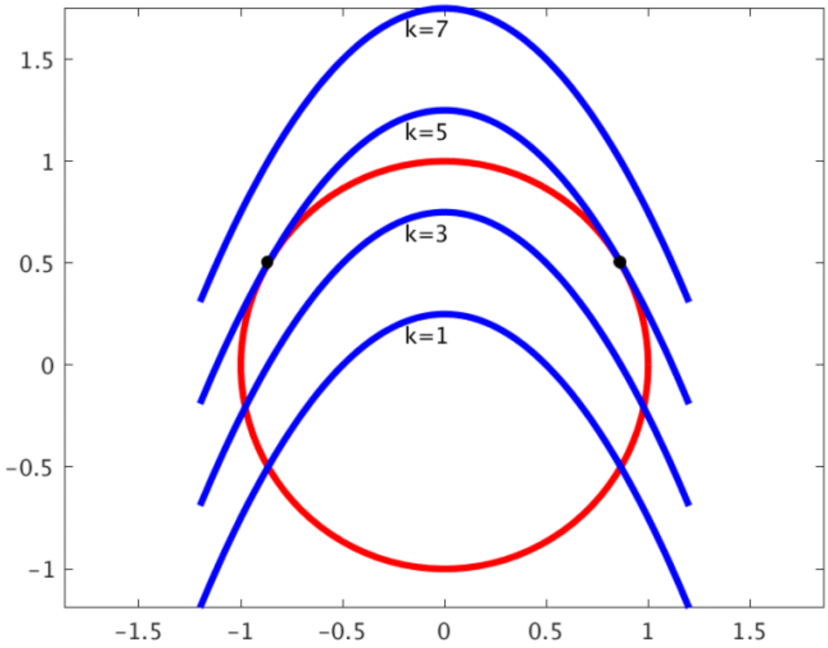
Annan möjlighet: Se som fall av

Optimering under bivillkor: $f(x,y)$, $g(x,y)$ def. på D.

Vill hitta globala max och min av $f(x,y)$ på D under förutsättning att $g(x,y)=k$.

villkoret $g(x,y)=k$ kallas ett bivillkor (constraint)

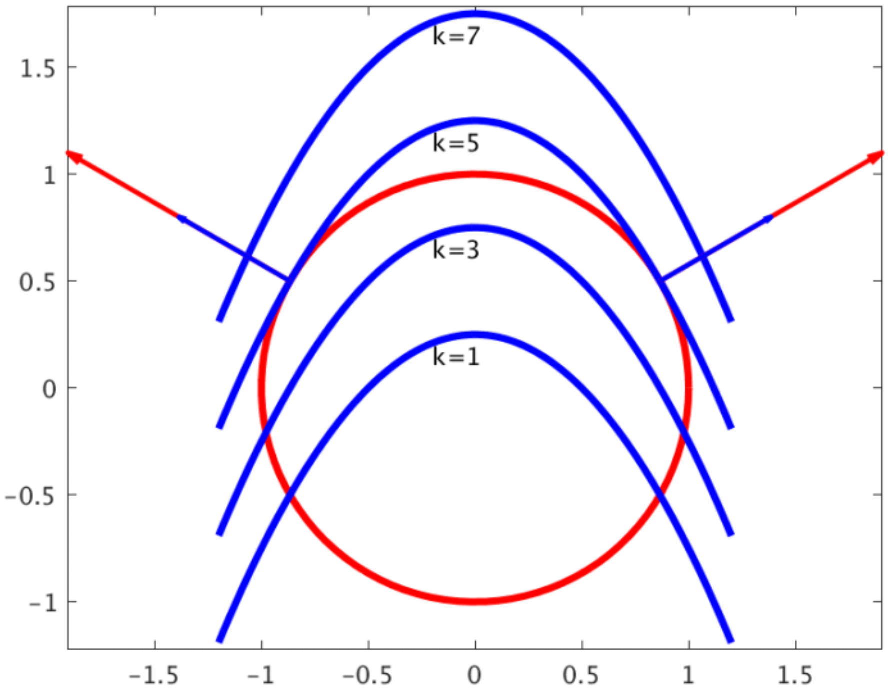
Max av $f(x,y)$ under bivillkoret $x^2+y^2=1$ är det största värdet k på en nivåkurva $f(x,y)=k$ som skär $g(x,y)=x^2+y^2=1$



Från bilden får man att största värdet på f(x,y) är 5/2 (när $y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$).

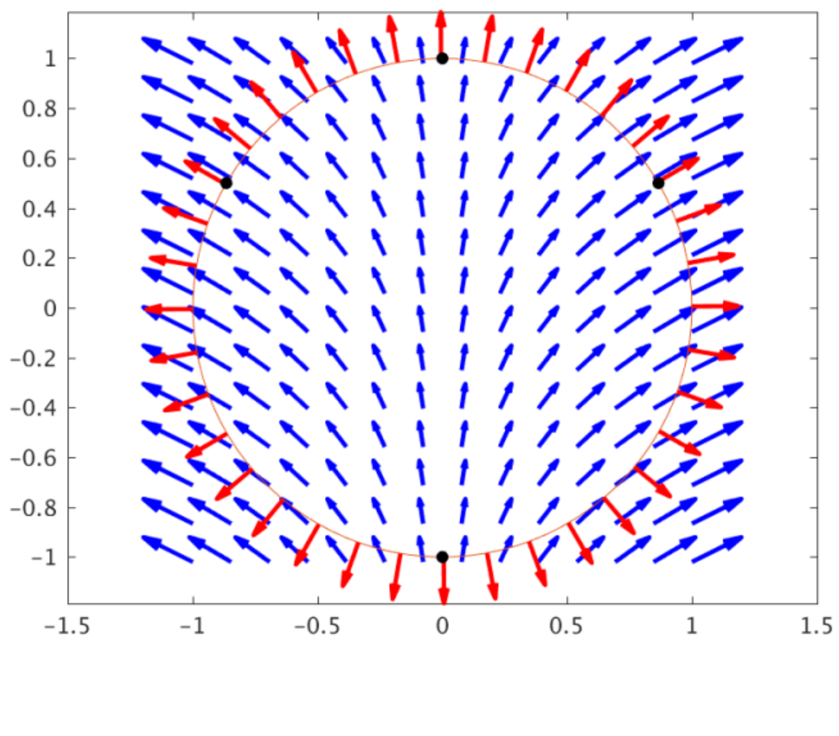
Ser ut som nivåkurvan f(x,y) = 5/2 och kurvan $g(x,y)=x^2+y^2=1$ som bestämmer bivillkoret har samma tangentlinje i maxpunkten

Tangentlinjerna är parallella om normallinjerna (som är vinkelräta mot tangentlinjerna) pekar i samma riktning. Riktningen av normallinjer bestäms av ∇f och ∇g.



(Gradienterna i grafen är omskalade)

Optimering med Lagrangemultiplikatorer: Leta efter max av f(x,y) när g(x,y) = k där ∇f och ∇g är parallella.



Metoden med Lagrangemultiplikatorer

För att maximera eller minimera $f(x,y)$ under bivillkoret att $g(x,y)=k$:

(under förutsättning att extremvärden finns och att $\nabla g(x,y) \neq 0$ på $g(x,y)=k$)

a) Hitta alla lösningar (x,y) till

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases}$$

för något λ.

(λ kallas Lagrangemultiplikator)

b) Beräkna värdet på f för alla lösningar (x,y) i a). Det största värdet ger max och det minsta ger min.

Anm: Förutsättningen att extremvärden finns är uppfyllt om $g(x,y)$ är sluten och begränsad, t.ex. om det är en cirkel eller ellips.
Kommer bara studera problem där extremvärden finns.

Ex Hitta max och min till $f(x,y) = 4x^2 + 4y$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

Enligt metoden, vill lösa

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = \lambda \cdot 2x \Leftrightarrow x = 0 \text{ el. } \lambda = 4 & (1) \\ 4 = \lambda \cdot 2y & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$x = 0 \underset{(3)}{\Rightarrow} y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \underset{(2)}{\Rightarrow} \lambda = \frac{4}{2y} = \pm 2.$$

$$\lambda = 4 \underset{(2)}{\Rightarrow} y = \frac{1}{2} \underset{(3)}{\Rightarrow} x^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Får följande lösningar

(x,y)	$f(x,y)$
$(0,1)$	4
$(0,-1)$	-4
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	5

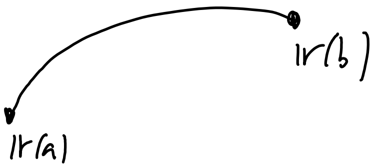
Så max är 5; $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

och min är -4; $(0,-1)$

Längd av kurvor i planet och rummet, 10.2 & 13.3

Antag har kurva med parametrisering $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$.

Hur räkna ut längden?



Skall motivera senare att längden l ges av

$$l = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| \, dt$$

Ex Beräkna längden av kurvan som ges av

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3), \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{t^2(4+9t^2)} = \underset{(t \ge 0)}{=} t\sqrt{4+9t^2}$$

så
$$l = \int_0^1 |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\, dt = \left\{ \begin{array}{l} s = 4+9t^2 \\ ds = 18t\,dt \\ t=0 \Rightarrow s=4 \\ t=1 \Rightarrow s=13 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_4^{13} \underbrace{\sqrt{s}}_{=s^{1/2}} \frac{ds}{18} = \frac{1}{18}\left[\frac{s^{3/2}}{3/2} \right]_4^{13} = \frac{1}{27}\left(13^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{1}{27}\left(13^{3/2} - 8\right)$$