Sammanfattning Föreläsning 7

- **Andraderivatatestet för lokala extremvärden**
  f(x,y) kontinuerliga partiella derivator ordning 2,
  låt D = $f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$.

  Om $f'_x(a,b) = 0 = f'_y(a,b)$ *(dvs* (a,b) *en kritisk punkt)* och

a) D > 0 och $f_{xx}(a,b)$ > 0, då är (a,b) ett lokalt min
b) D > 0 och $f_{xx}(a,b)$ < 0, då är (a,b) ett lokalt max
c) D < 0, då är (a,b) en sadelpunkt

Randpunkter till en mängd D är punkter (x,y) i $\mathbb{R}^2$ s.a. varje cirkelskiva kring (x,y) innehåller både punkter från D och utanför D

D är **sluten** om den innehåller alla sina randpunkter

D är **begränsad** om den är innehållen i någon cirkelskiva

Sats Om f(x,y) är kontinuerlig på $D \subseteq \mathbb{R}^2$, där D är sluten och begränsad, då har f ett globalt max och min på D.

Metod för att bestämma max och min till f(x,y),
där f(x,y) deriverbar på D $\subseteq \mathbb{R}^2$, D sluten och begränsad:

Max och min till f får man genom att jämföra funktionsvärdena i

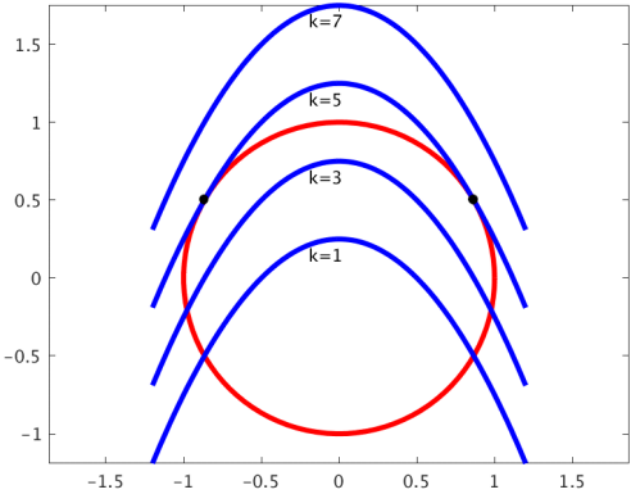
1) Kritiska punkter till f i D
2) Randpunkter till D

   Detta kan preciseras om parametriserar randen med kurvor:

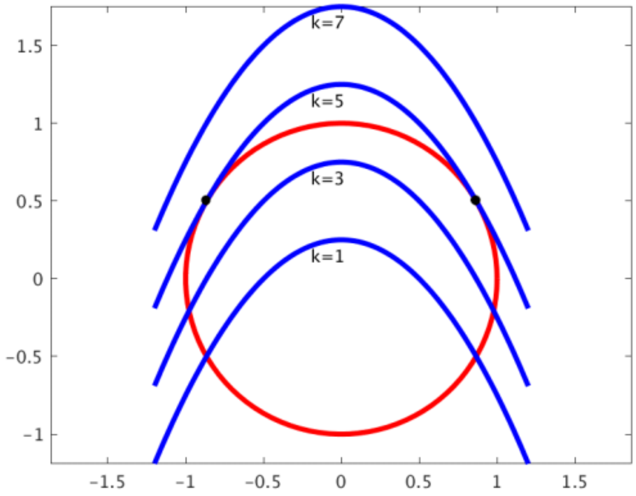
   2.1) Kritiska punkter när ser f som funktion av en variabel längs randkurvor

   2.2) Hörn, dvs. ändpunkter till randkurvorna

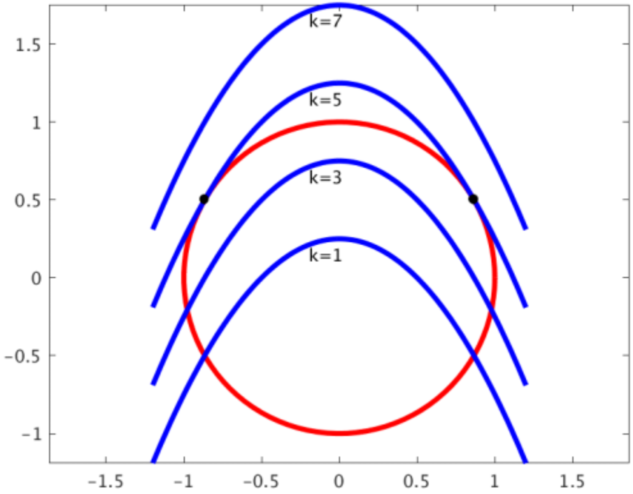
Max av $f(x,y)$ under bivillkoret $x^2+y^2=1$ är det största värdet k på en nivåkurva $f(x,y)=k$ som skär $g(x,y)=x^2+y^2=1$



Från bilden får man att största värdet på f(x,y) är 5
(när $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$)

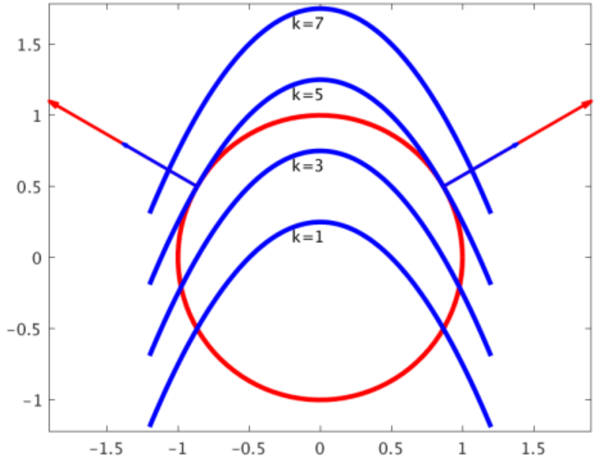


Ser ut som nivåkurvan f(x,y) = 5 och kurvan $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$
som bestämmer bivillkoret har samma tangentlinje i maxpunkten



Tangentlinjerna är parallella om normallinjerna (som är vinkelräta mot tangentlinjerna) pekar i samma riktning. Riktningen av normallinjer bestäms av ∇f och ∇g.

(Gradienterna i grafen är omskalade)



Optimering med Lagrangemultiplikatorer: Leta efter max av f(x,y) när g(x,y) = k i punkter (x,y) där ∇f och ∇g är parallella.