

Sammanfattning Föreläsning 8

- Optimering med bivillkor - Lagrangemultiplikatorer:
För att hitta extremvärden till $f(x,y)$ under bivillkoret att $g(x,y) = k$ (om extremvärden finns och $\nabla g(x,y) \neq 0$ på $g(x,y)=k$):
 - 1) Hitta alla lösningar (x,y) till
$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = k \end{cases} \quad \text{för någon konstant } \lambda$$
 - 2) Beräkna $f(x,y)$ för alla lösningar från 1). Det största värdet ger maximum och det minsta minimum.

Längd av kurvor (forts.) 10.3, 13.3.

Om en kurva parametreras av $r(t)$, så är dess längd

$$l = \int_a^b |r'(t)| dt$$

Obs: En graf $y=f(x)$ är ett specialfall av en kurva och kan parametreras $r(x)=(x, f(x))$.

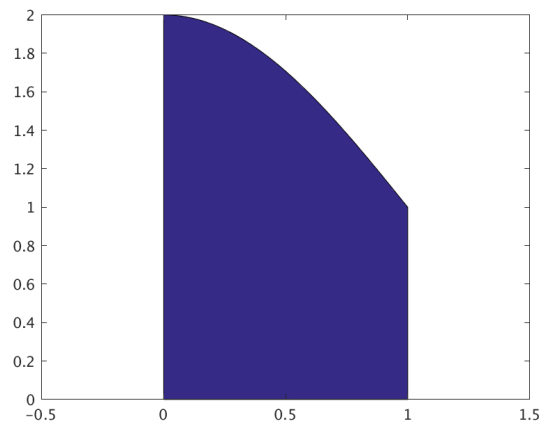
Då är $|r'(x)| = \sqrt{1+f'(x)^2}$, så längden av grafen blir

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx.$$

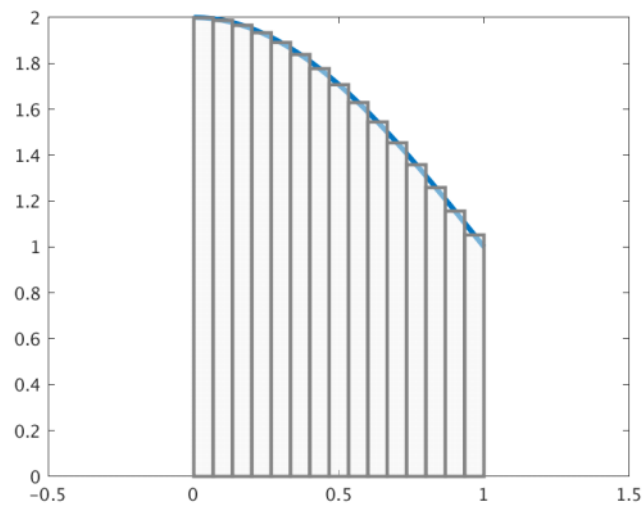
Detta specialfall finns redan i avsnitt 8.1.

Integraler i en variabel

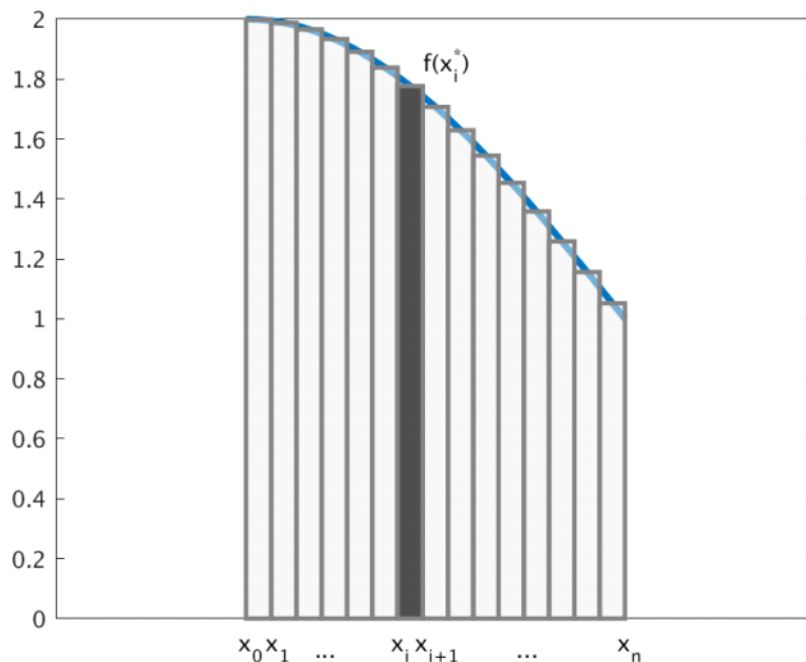
$$\int_a^b f(x) dx = \text{"Arean under grafen } f(x)\text{"}$$



Integraler definierade genom att approximera grafen med rektanglar, beräkna arean av rektanglarna och gå i gräns med finare och finare indelning



Gör indelning $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ väljer punkter $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$ och skapar rektanglar mellan x_{i-1} och x_i i x-led och mellan 0 och $f(x_i^*)$ i y-led.



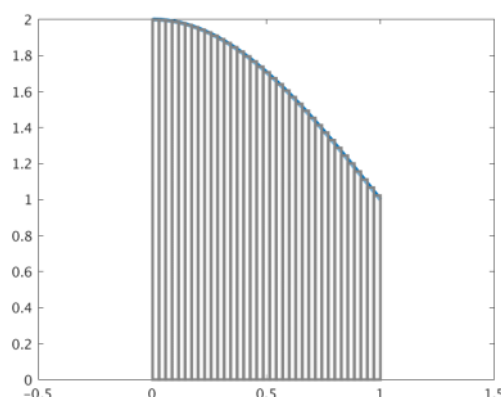
Arean av rektangel nr i : $f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$

Area av alla rektanglar (kallas en Riemannsumma för f)

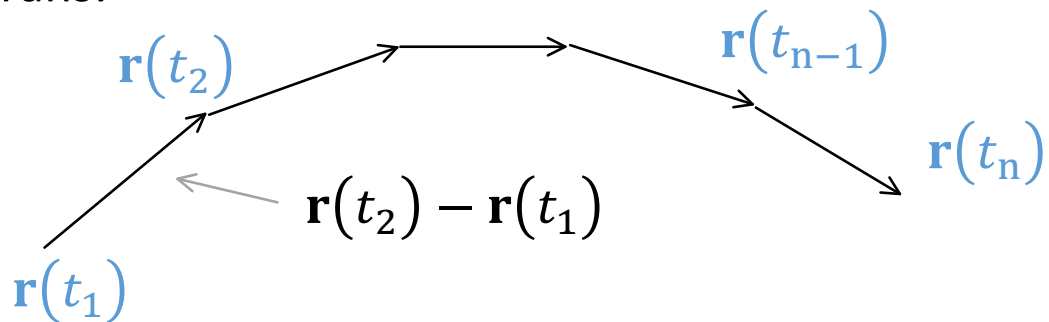
$$f(x_1^*)(x_1 - x_0) + f(x_2^*)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_n^*)(x_n - x_{n-1})$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_1^*)(x_1 - x_0) + \dots + f(x_n^*)(x_n - x_{n-1})$$

där gränsvärdet är att man tar finare och finare indelningar (dvs längden av delintervallen går mot 0)



För att beräkna längd av kurva $\mathbf{r}(t)$ mellan a och b, approximerar kurvan med räta linjer, beräknar längden och går i gräns:



$$\text{Total längd: } |\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)| + \cdots + |\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})|$$

Härleder formel för gränsvärdet av längden

$$|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)| + \cdots + |\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})|$$

när $n \rightarrow \infty$ i specialfallet $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$:

Enligt medelvärdessatsen: $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$
för något $t_i \leq t_i^* \leq t_{i-1}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| &= \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}))^2} = \sqrt{1 + f'(t_i^*)^2} (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Vi ersätter varje term i totala längden

$$|\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)| + \cdots + |\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}(t_{n-1})|$$

$$\text{med } |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sqrt{1 + f'(t_i^*)^2} (t_i - t_{i-1})$$

och får då att längden av den approximerande kurvan blir

$$\sqrt{1 + f'(t_1^*)^2} (t_1 - t_0) + \cdots + \sqrt{1 + f'(t_n^*)^2} (t_n - t_{n-1})$$

Längden $\sqrt{1 + f'(t_1^*)^2}(t_1 - t_0) + \dots + \sqrt{1 + f'(t_n^*)^2}(t_n - t_{n-1})$ av den approximerande kurvan är en Riemannsumma för

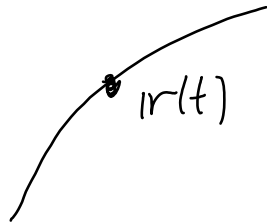
$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = \int_a^b |\mathbf{r}'(x)| \, dx$$

så när $n \rightarrow \infty$ så går längden av den approximerande kurvan mot integralen ovan vilket motiverar formeln för längden (när kurvan är en graf).

För allmänna kurvor finns en skiss till argument på s. 648-649

Rörelse av partiklar i rummet 13.4

Man kan använda en parametrisering av en kurva $\mathbf{r}(t)$ för att beskriva rörelsen av en partikel i rummet när tiden t varierar.



Def

Hastighetsvektorn $\mathbf{v}(t)$ för en sådan partikel är $\mathbf{r}'(t)$ och farten är längden $|\mathbf{r}'(t)|$ av hastighetsvektorn.

Accelerationen är $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$.

Ex Låt $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$
Beräkna hastigheten, farten och accelerationen av en partikel vars position ges av $\mathbf{r}(t)$.

Hastighet:

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t)$$

Fart:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$$

Acceleration:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 2)$$

Detta används för att beskriva olika fysiska fenomen, t.ex:

Newtons andra lag: Om kraften $F(t)$ verkar på en partikel med massa m , så är

$$F(t) = m a(t)$$

Ex Antag att bara gravitationsfältet

$$F = \langle 0, 0, -g \rangle$$

verkar på en partikel som vid $t=0$ har position

$r(0) = (a, b, c)$ och hastighet $v(0) = (d, e, f)$.

Då har partikeln vid tiden t position

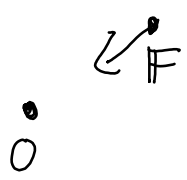
$$r(t) = \left(a + dt, b + et, c + ft - \frac{gt^2}{2m} \right)$$

Kan kontrolleras: $r(0) = (a, b, c)$

$$v(0) = r'(0) = \langle d, e, f \rangle$$

$$m a(t) = m r''(t) = \langle 0, 0, -g \rangle = F(t).$$

Newtons gravitationslag: Om har två kroppar med massa M resp. m , och den första har position i origo och den andra position $\mathbf{r}$, så dras den andra kroppen mot den första med kraften


$$\mathbf{F} = - \frac{GMm}{r^3} \mathbf{r}, \text{ där } r = |\mathbf{r}|.$$

(G universell konstant)

($|\mathbf{F}|$ proportionell mot M , m och $\frac{1}{r^2} = \frac{|\mathbf{r}|}{r^3}$)

Dessa lagar kan bl.a. användas för att härleda Keplers lagar om hur en planet rör sig kring en sol, se s. 868-869.

Enklare variant:

Ex: Om en planet rör sig kring en sol så rör den sig i ett plan.

Tänker sig solen i centrum, planeten pos. $\mathbf{r}(t)$.

Kombinerar Newton's lagar:

$$m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F} = - \frac{GMm}{r^3} \mathbf{r}(t)$$

Speciellt är $\mathbf{a}(t)$ och $\mathbf{r}(t)$ parallella.

Egenskaper hos kryssprodukt:

a) Om u och v är parallella så är
 $u \times v = 0$.

b) $u \times v$ är vinkelrät mot u och v .

Egenskaper för derivata av vektorvärda funktioner

c) $\frac{d}{dt} (u(t) \times v(t)) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$.

d) $u'(t) = 0 \Rightarrow u(t) = (A, B, C)$
för $\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{konstanter.}}$

$$u'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle \Rightarrow x'(t) = 0 \Rightarrow x(t) = A \text{ osv.}$$

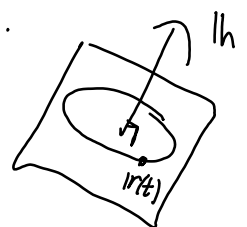
Enligt c):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r(t) \times v(t)) &= r'(t) \times v(t) + r(t) \times v'(t) = \\ &= \underbrace{v(t) \times v(t)}_{\text{parallella}} + r(t) \times \underbrace{a(t)}_{\text{parallella}} = 0 \end{aligned}$$

Så $r(t) \times v(t) = \langle A, B, C \rangle = h$ för någon konstant vektor.

Enligt b) är då $r(t)$ alltid vinkelrät mot h ,
dvs ligger i planet som är vinkelrät mot h .

Keplers lagar ger mer precis information:
rör sig längs ellips



Obs: Detta gäller ett solsystem med en planet.
För fler planeter är det väsentligen omöjligt
att explicit beskriva planetrörelserna, och
detta är ett av de ursprungliga exemplen
på ett kaotiskt system (små ändringar
i position eller hastighet ger helt andra rörelsebanor).