

Lösningar, Tenta 2017-08-17, LMA017

1. Antag att en partikel rör sig med positionsvektor

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(2t) + \cos(2t), \sin(2t) - \cos(2t), t^2).$$

Vad är hastigheten, farten och accelerationen av partikeln?

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\sin(2t) + \cos(2t), \sin(2t) - \cos(2t), t^2)$$

$$\text{Hastighet} = \mathbf{r}'(t) \quad \text{Fart} = |\mathbf{r}'(t)| \quad \text{Acceleration} = \mathbf{r}''(t).$$

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (2\cos(2t) - 2\sin(2t), 2\cos(2t) + 2\sin(2t), 2t)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)|^2 &= (2\cos(2t) - 2\sin(2t))^2 + (2\cos(2t) + 2\sin(2t))^2 + (2t)^2 \\ &= 4\cos^2(2t) - 4\cos(2t)\sin(2t) + 4\sin^2(2t) \\ &\quad + 4\cos^2(2t) + 4\cos(2t)\sin(2t) + 4\sin^2(2t) + 4t^2 = \\ &= 8(\underbrace{\cos^2(2t) + \sin^2(2t)}_{=1}) + 4t^2 = 8 + 4t^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = (-4\sin(2t) - 4\cos(2t), -4\sin(2t) + 4\cos(2t), 2)$$

Svar: Hastighet: $\mathbf{r}'(t) = (2\cos(2t) - 2\sin(2t), 2\cos(2t) + 2\sin(2t), 2t)$

Fart: $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8 + 4t^2}$

Acceleration: $\mathbf{r}''(t) = (-4\sin(2t) - 4\cos(2t), -4\sin(2t) + 4\cos(2t), 2)$

2. Låt

$$g(x, y) = f(e^{x+2y}, e^{x-2y}),$$

där $f(u, v)$ är en deriverbar funktion så att

$$f(0, 0) = 2, f_u(0, 0) = 3, f_v(0, 0) = 7$$

och

$$f(1, 1) = 3, f_u(1, 1) = 11, f_v(1, 1) = 5.$$

Beräkna $g'_x(0, 0)$ och $g'_y(0, 0)$.

Låt $u(x, y) = e^{x+2y}$, $v(x, y) = e^{x-2y}$. Då är $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$.

Behöver följande derivator här använder kedjeregeln nedan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+2y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = e^0 = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{x-2y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x+2y} \cdot 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = e^0 \cdot 2 = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x-2y} \cdot (-2), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = e^0 \cdot (-2) = -2.$$

Enligt kedjeregeln:

$$g'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (f(u(x, y), v(x, y))) = f'_u(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + f'_v(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

$$\text{så } g'_x(0, 0) = f'_u(1, 1) u'_x(0, 0) + f'_v(1, 1) v'_x(0, 0) = 11 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 16$$

På motsvarande sätt:

$$g'_y(0, 0) = f'_u(1, 1) u'_y(0, 0) + f'_v(1, 1) v'_y(0, 0) = 11 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) = 12.$$

Svar: $g'_x(0, 0) = 16$, $g'_y(0, 0) = 12$.

3. Låt $f(x, y) = y + x - 5$. Bestäm maximum och minimum av funktionen $f(x, y)$ under bivillkoret

$$2x^2 + y^2 = 1.$$

Bivillkoret innebär att (x, y) är en ellips som är sluten och begränsad, och alltså existerar maximum och minimum, och kan därmed användas metoden med Lagrangemultiplikatorer:

Max/min till $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = c$ måste vara lösningar till

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = c \end{cases}$$

för något λ .

Med $f(x, y) = y + x - 5$ och $g(x, y) = 2x^2 + y^2$,

får vi följande ekv. system:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = \lambda \cdot 4x \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4x}, \quad x \neq 0 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = \lambda \cdot 2y \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{1}{4x} \cdot 2y \Leftrightarrow y = 2x, \quad x \neq 0 & (2) \\ g(x, y) = 2x^2 + y^2 = 1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2x^2 + (2x)^2 = 6x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}. & \end{cases}$$

Kandidater till max/min: $x = 1/\sqrt{6} \Rightarrow y = 2x = 2/\sqrt{6}$
 $x = -1/\sqrt{6} \Rightarrow y = 2x = -2/\sqrt{6}$.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - 5 = \frac{3}{\sqrt{6}} - 5 \leftarrow \text{störst} \Rightarrow \text{max}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} - 5 = -\frac{3}{\sqrt{6}} - 5 \leftarrow \text{minst} \Rightarrow \text{min}$$

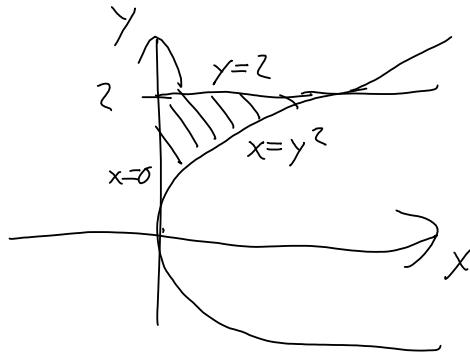
Svar: max $\frac{3}{\sqrt{6}} - 5$; $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ och min $-\frac{3}{\sqrt{6}} - 5$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D e^{y^3} dA,$$

där D är området som begränsas av kurvorna $x = 0$, $y = 2$ och $x = y^2$.

Ritar området:



Området ges som $D = \{ (x,y) \mid 0 \leq y \leq 2 \quad 0 \leq x \leq y^2 \}$

så enligt formeln för upprepad integration:

$$\iint_D e^{y^3} dA = \int_0^2 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx dy = \int_0^2 \left[e^{y^3} x \right]_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^2 e^{y^3} y^2 dy = \left\{ \begin{array}{l} t = y^3 \\ dt = 3y^2 dy \\ y=0 \Rightarrow t=0 \\ y=2 \Rightarrow t=8 \end{array} \right\} = \int_0^8 e^t dt/3 = \left[e^t/3 \right]_0^8 = \frac{e^8 - 1}{3}.$$

Svar: $\frac{e^8 - 1}{3}$.

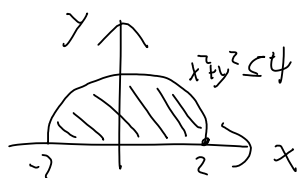
5. Beräkna arean av den delen av hyperboloiden $z = 2(x^2 - y^2)$ som ligger ovanför halvcirkelskivan $\{x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

Arean av grafen $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ ges av

$$\iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dA$$

$$f(x, y) = 2x^2 - 2y^2 \quad f'_x = 4x \quad f'_y = 4y.$$

Området $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ ges i polära koordinater som $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$



Enligt formeln för integration i polära koordinater,

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2} dA &= \int_0^2 \int_0^\pi \sqrt{1 + 16r^2} r d\theta dr = \\ &= \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 16r^2} r dr = \left\{ \begin{array}{l} s = 1 + 16r^2 \\ ds = 32r dr \\ r=0 \Rightarrow s=1 \\ r=2 \Rightarrow s=65 \end{array} \right\} = \pi \int_1^{65} \sqrt{s} ds / 32 = \frac{\pi}{32} \left[\frac{s^{3/2}}{3/2} \right]_1^{65} = \frac{\pi}{48} (65^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{48} (65^{3/2} - 1)$ a.e.

6. Beräkna arbetet som vektorfältet $\mathbf{F} = (e^{-y}, -xe^{-y} + e^y)$ utför på en partikel som rör sig längs med kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(\pi t), 3t + \sin(\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\mathbb{F} = (P, Q) = (e^{-y}, -xe^{-y} + e^y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{-y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{och det. på } \mathbb{R}^2 \text{ som är enkelt sammanhängande} \Rightarrow$$

$$\mathbb{F} \text{ är konservativt, dvs } \mathbb{F} = \nabla f.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = e^{-y} \Rightarrow f = xe^{-y} + g(y) \quad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \stackrel{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial y} (xe^{-y} + g(y)) = -xe^{-y} + g'(y) = Q = -xe^{-y} + e^y$$
$$\Rightarrow g'(y) = e^y \Rightarrow g(y) = e^y + C.$$

$$\text{En potential är då (med } C=0) \quad f = xe^{-y} + e^y.$$

$$\text{Om } C \text{ är kurvan som ges av } \mathbf{r}(t) = (\cos(\pi t), 3t + \sin(3\pi t)) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{Så ges arbetet av } \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

och enligt huvudsatsen för kurvintegraler:

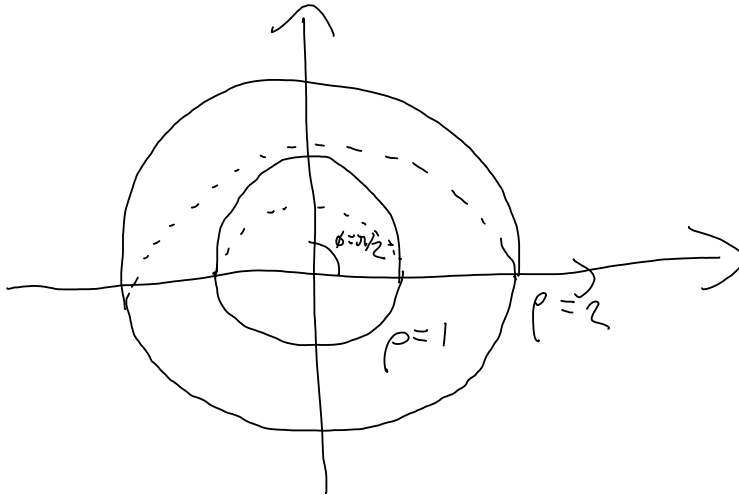
$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(-1, 3) - f(1, 0)$$
$$= -e^{-3} + e^3 - (1 + 1) = -e^{-3} + e^3 - 2$$

$$\underline{\text{Svar:}} \text{ Arbetet är } -e^{-3} + e^3 - 2$$

7. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D x^2 + y^2 dV,$$

där D är området innehållit i $\{z \geq 0\}$ som ligger mellan sfärerna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.



Området ges i sfäriska koordinater

$$(x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

$$\text{av } 1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

($z \geq 0$)

$$\begin{aligned} \text{I sfäriska koordinater } x^2 + y^2 &= \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta = \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} = \rho^2 \sin^2 \phi. \end{aligned}$$

Enligt formeln för integration i sfäriska koordinater
($dV = \rho^2 \sin \phi d\theta d\rho d\phi$)

$$\iint_D x^2 + y^2 dV = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2 \phi \rho^2 \sin \phi d\theta d\rho d\phi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \sin^3 \phi \rho^4 d\rho d\phi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \phi \left[\rho^5/5 \right]_1^2 d\phi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2^5 - 1}{5} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^3 \phi d\phi =$$

(trig. ettan)

$$= 2\pi \cdot \frac{31}{5} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos \phi \\ dt = -\sin \phi \\ \phi = 0 \Rightarrow t = 1 \\ \phi = \pi/2 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{62\pi}{5} \left(-\int_1^0 (1 - t^2) dt \right) = \frac{62\pi}{5} \int_0^1 (1 - t^2) dt = \frac{62\pi}{5} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{62\pi}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{124\pi}{15}$$

Svar: $124\pi/15$

(svaret behöver inte förenklas, utan gör lika bra att svara $\frac{2\pi(2^5-1) \cdot 2}{5 \cdot 3}$)

8. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z(x^2 + y^2))$ ut ur området som begränsas av cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planen $z = 0$ och $z = 2$.

Om S är ytan som begränsas av cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planen $z = 0$ och $z = 2$ så ges flödet av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

S är randen till området $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

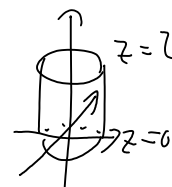
Enligt divergenssatsen är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z(x^2 + y^2)) = 2x + 2y + x^2 + y^2.$$

I cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ ges

D av $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2$



så enligt formeln för integration i cylindriska koord

$$\begin{aligned} \iiint_D 2x + 2y + x^2 + y^2 \, dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r \cos \theta + 2r \sin \theta + r^2) r \, d\theta \, dz \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^2 r^3 \, dz \, dr = 4\pi \int_0^1 r^3 \, dr = 4\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \pi \end{aligned}$$

($\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0$)

Svar: π (volymenhet/tidsenhet)