

Formelsamling LMA017 18/19

Längdelement för kurvintegral längs kurva $\mathbf{r}(t)$

för integral av funktion:

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$$

för integral av vektorfält:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$$

Ytelement för ytintegral på yta $\mathbf{r}(u, v)$

för integral av funktion:

$$dS = |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)|dudv.$$

för integral av vektorfält:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)dudv.$$

Om $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ så är $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle -f_u, -f_v, 1 \rangle$.

Masscentrum för kurva C med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right), \text{ där } M_x = \int_C x\rho(x, y, z)ds \text{ osv., och } m = \int_C \rho(x, y, z)ds$$

Masscentrum för parametriserad yta S med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right), \text{ där } M_x = \iint_S x\rho(x, y, z)dS \text{ osv., och } m = \iint_S \rho(x, y, z)dS$$

Masscentrum för kropp D med densitet $\rho(x, y, z)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}, \frac{M_z}{m} \right), \text{ där } M_x = \iiint_D x\rho(x, y, z)dV \text{ osv., och } m = \iiint_D \rho(x, y, z)dV$$

Green's formel, C enkel sluten positivt orienterad kurva i planet som begränsar området D

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Polära koordinater $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

$$dA = dx dy = r dr d\theta.$$

Cylindriska koordinater $(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$

$$dV = dx dy dz = r dr d\theta dz.$$

Sfäriska koordinater $(x, y, z) = (\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi))$

$$dV = dx dy dz = \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\theta d\phi.$$

Trigonometri

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ekvation för plan med normalvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ genom punkt (x_0, y_0, z_0)

$$\mathbf{v} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0.$$

Linje med riktningsvektor $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ genom punkt $w = (x_0, y_0, z_0)$

$$w + t\mathbf{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3).$$

Kryssprodukt för vektorer i rummet

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \langle v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1 \rangle.$$

Derivator

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}, \quad a \neq 0$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Integraler

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx \quad \text{där } F'(x) = f(x) \text{ och } G'(x) = g(x)$$