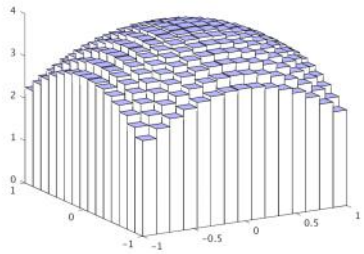
Sammanfattning Föreläsning 10

- Dubbelintegraler definerade med Riemannsummor

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$$

(om gränsvärdet existerar, då är f **integrerbar**)

Om $f(x,y) \geq 0$ ger integralen volymen
av området mellan D och $z = f(x,y)$



Sats Om f är kontinuerlig på $D = [a,b]\times[c,d]$ så är f integrerbar på D

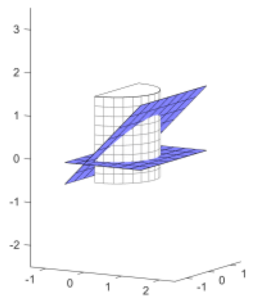
Sats Om f är kontinuerlig på $D = [a,b]\times[c,d]$ så är

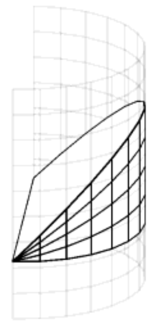
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

(Integralerna på höger sida kallas **upprepade integraler**)

Exempel Vill beräkna volymen av området som ligger innanför området $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ i xy-planet och mellan planen $z = 0$ och $z = x$.





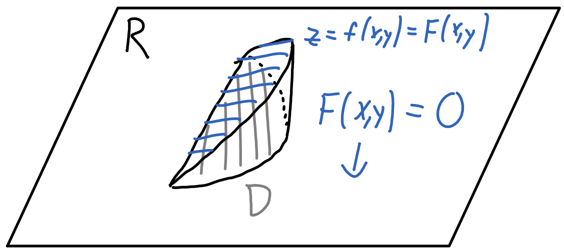
Bör ges av $\iint_D f(x, y)\, dA$ där $f\big(x, y\big) = x$ är höjden.

Dubbelintegraler över allmänna områden $D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\iint_D f\big(x, y\big)\, \mathrm{d}A = \iint_R F\big(x, y\big)\, \mathrm{d}A$$

där R rektangel som innehåller D och

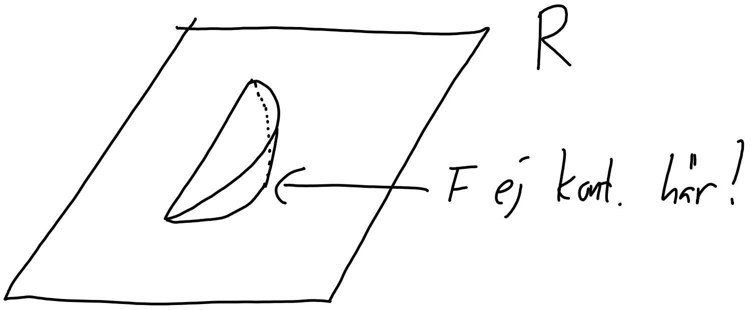
$$F(x, y) = \begin{cases} f\big(x, y\big) & \text{om } \big(x, y\big) \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Dubbelintegraler över allmänna områden (forts.)

Ex Om $f(x,y)=x$ och $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\}$

som i exemplet från förra föreläsningen grafen till F så här:



Vilka funktioner kan man integrera?

f kont. på D $\not\Rightarrow$ F kont. på R
(exempel ovan)

Går bra om f kont. på D och D inte "för konstigt".

Typer av områden:

$D\subseteq \mathbb{R}^2$ är av typ I om det kan skrivas

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c(x)\le x\le d(x)\},$$

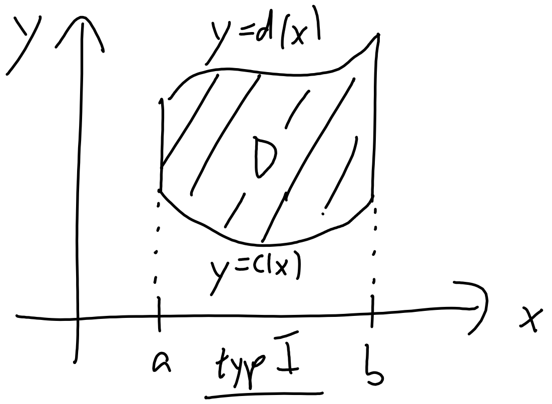
$c(x)$, $d(x)$ kontinuerliga.

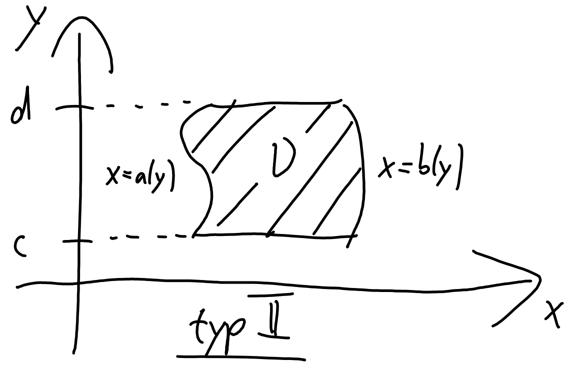
(området mellan graferna till två funktioner)

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ är av <u>typ II</u> om det kan skrivas

$$D = \{ (x,y) \mid c \le y \le d,\ a(y) \le x \le b(y) \}.$$

$a(y)$, $b(y)$ kontinuerliga.





<u>Sats</u> Om D är ett område av typ I eller II, och f är kontinuerlig på D, så är f integrerbar på D.

Om $D = \{ (x,y) \mid a \le x \le b,\ c(x) \le y \le d(x) \}$ (typ I)

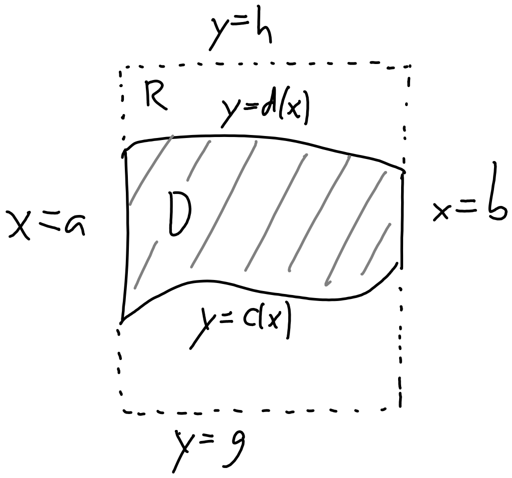
så är $$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

och om $D = \{ (x,y) \mid c \le y \le d,\ a(y) \le x \le b(y) \}$ (typ II)

så är $$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Härledning

Autar D typ I & $D \subseteq R = [a,b] \times [g,h]$



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA \underset{\text{(Fubini)}}{=} \int_a^b \int_g^h F(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} F(x,y)=0 \\ \text{om } g \le y < c(x) \\ \text{el. } d(x) < y \le h \end{array} \right\} = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} F(x,y)\,dy\,dx = \left\{ \begin{array}{l} F(x,y) = f(x,y) \\ \text{om } (x,y) \in D \end{array} \right\}$$

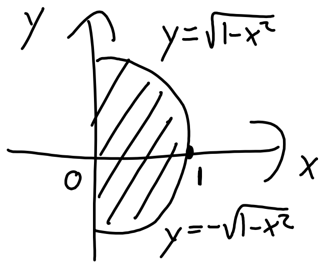
$$= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

För typ II-områden analog härledning.

Ex Låt $D = \{ (x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \geq 0 \}$.

Beräkna $\iint_D x\,dA$ (från förra föreläsningen)

D är ett typ I-område:



$D = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \}$ så

$$\iint_D x\,dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx = \int_0^1 \Big[xy \Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{array} \right\} = -\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

D är också typ II-område. Blir enklare om använder den formeln. Bra övning.

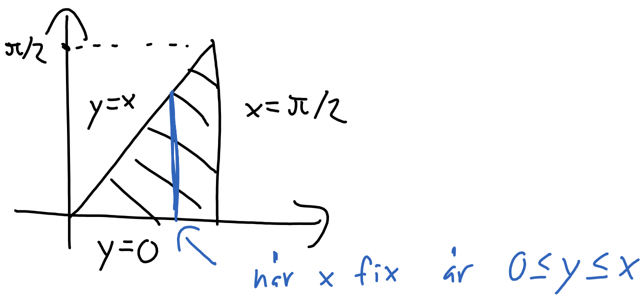
Ibland omöjligt/svårt integrera i en ordning, enkelt i andra.

<u>Ex</u> Beräkna $\int_0^{\pi/2}\int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$ genom att tolka den upprepade integralen som en dubbelintegral och byt integrationsordning.

<u>Obs:</u> Den primitiva funktionen till $\frac{\sin x}{x}$ kan inte uttryckas m.h.a. elementära funktioner (Wikipedia: Nonelementary integral) Går därför inte beräkna integralen i ursprungliga ordningen.

Den upprepade integralen svarar mot dubbelintegralen av $\frac{\sin x}{x}$ över typ II-området

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le \pi/2,\ y \le x \le \pi/2\}.$$



Från figur: D är också ett typ I-område:

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le y \le x\}$$

(oftast svårt bara m.h.a. formler gå från beskrivning som typ I-område till typ II-område eller tvärtom. Oftast bäst göra m.h.a. figur.)

$$\int_0^{\pi/2}\int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy \underset{\substack{\text{(Fubini för}\\ \text{typ II)}}}{=} \iint_D \frac{\sin x}{x}\,dA =$$

$$\underset{\substack{\text{(Fubini för}\\ \text{typ I)}}}{=} \int_0^{\pi/2}\int_0^{x} \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin x}{x}\,y\right]_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0 = 1.$$

Egenskaper hos integraler:

a) A, B konstanter:

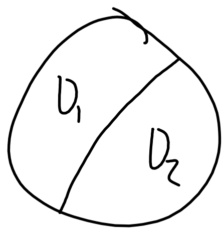
$$\iint_D Af(x,y) + Bg(x,y)\,dA = A\iint_D f(x,y)\,dA + B\iint_D g(x,y)\,dA.$$

(integralen är linjär)

b) Om $f(x,y) \geq g(x,y)$ så är $\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA$

c) $$\text{area}(D) = \iint_D 1\,dA.$$

d) Om $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$



då är

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA.$$

e) Om $f(x,y) \geq g(x,y)$ så ges volymen av området mellan $z = g(x,y)$ och $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ av

$$\iint_D f(x,y) - g(x,y)\,dA$$