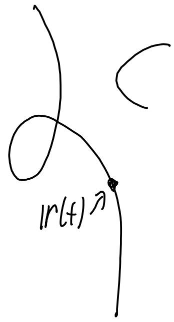
Sammanfattning Föreläsning 1

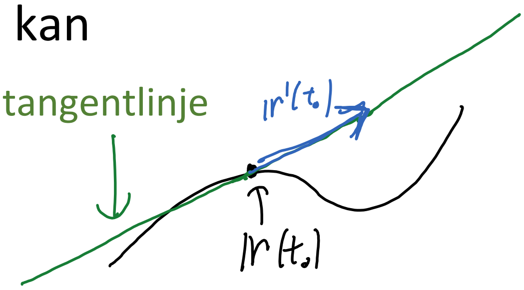


- En *kurva* C är ett geometriskt objekt som beskrivs med *en* parameter, vilken ges som alla punkter med positionsvektor $\boldsymbol{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ eller $\boldsymbol{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$

- Funktionen $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eller $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ kallas en *parametrisering* av C och beror alltså på en variabel och har två eller tre komponenter

- *Derivatan* eller *tangentvektorn* till $\boldsymbol{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ i $t_0$är $\boldsymbol{r}'(t_0) = \langle x'(t_0), y'(t_0) \rangle$
  (om funktionerna är deriverbara)

- *Tangentlinjen* till $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{r}(t_0)$ är linjen som innehåller $\boldsymbol{r}(t_0)$ med riktningsvektor $\boldsymbol{r}'(t_0)$ och kan parametriseras av
  $$L(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + t\boldsymbol{r}'(t_0)$$



Funktioner av flera variabler 14.1

Def En (reellvärd) funktion av två variabler är en regel som till varje (x,y) i någon mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ger ett reellt tal $f(x,y)$

"delmängd av"

D kallas definitionsmängd (domain) till f och $\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$ kallas värdemängd (range) till f.

Skriver $f: D \to \mathbb{R}$.

Ex 1) Koordinatfunktionerna x och y grundläggande exempel.

2) Om $f(x,y), g(x,y)$ funktioner, kan skapa nya funktioner:

$f(x,y)+g(x,y)$, $f(x,y)\cdot g(x,y)$, $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$, där $g(x,y) \neq 0$

$\sin(f(x,y))$, $e^{f(x,y)}$, ...

$\sqrt{f(x,y)}$, $\ln f(x,y)$ där $f(x,y) \geq 0$ resp. > 0.

Classtime.com: Vad är definitionsmängden och värdemängden till $f(x,y) = \sqrt{x+y}$?

Kvadratroten är definierad för tal ≥ 0, så f definierad om $x + y \geq 0$.

Kvadratroten är alltid ≥ 0, så värdemängden är innehållen i $\{ t \mid t \geq 0\}$. Blir också hela detta eftersom om $t \geq 0$ så är t.ex. $t = \sqrt{t^2 + 0} = f(t^2, 0)$.

Definitionsmängden till $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ är alltså $\{ (x,y) \mid x + y \geq 0\}$ och värdemängden är $\{t \mid t \geq 0 \}$.

(Hur förstå? Följande kan vara till hjälp)

<u>Def</u> <u>Grafen</u> till en funktion $f(x,y)$ med def. mängd D är alla punkter (x,y,z) i rummet s.a.

$$z = f(x,y) \quad (x,y) \in D.$$

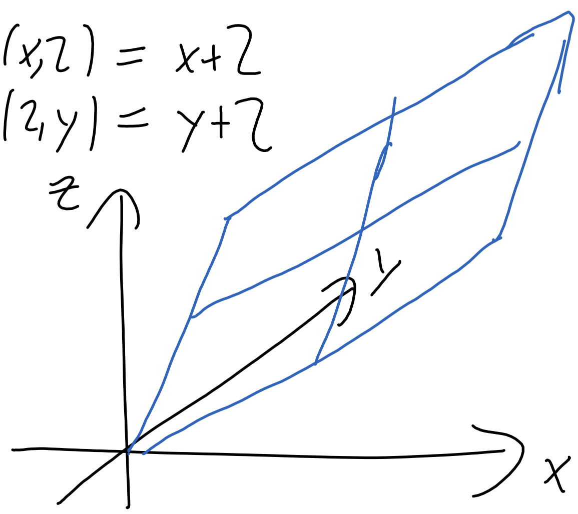
<u>Ex</u> Rita grafen till $f(x,y) = x+y$.

Ritar längs några räta linjer

$f(x,0) = x$, $f(x,1) = x+1$, $f(x,2) = x+2$

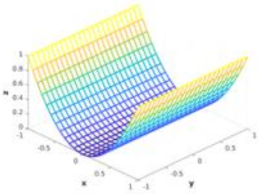
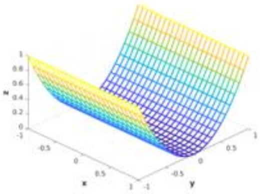
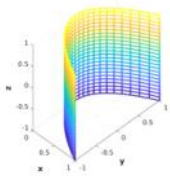
$f(0,y) = y$, $f(1,y) = y+1$, $f(2,y) = y+2$

(Ger här bra bild hur är eftersom f linjär)

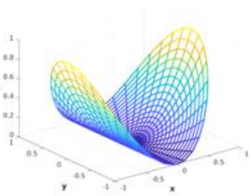
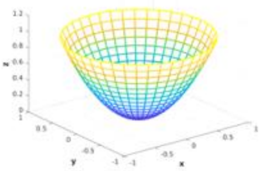
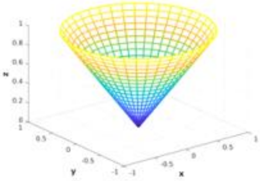


Classtime.com:

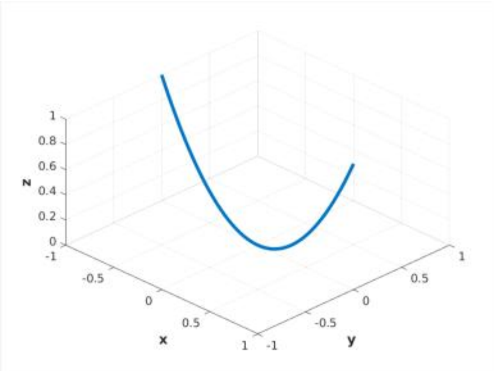
Vilken av följande är grafen till $f(x,y) = x^2$?

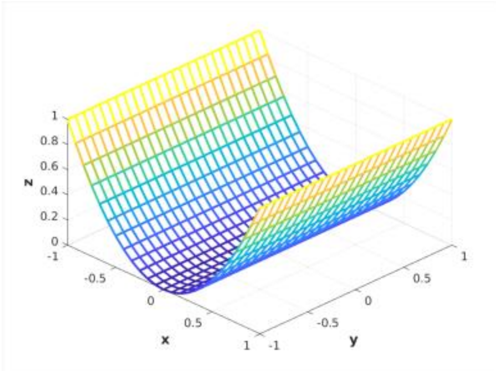




Vilken av följande är grafen till $f(x,y) = x^2 + y^2$?

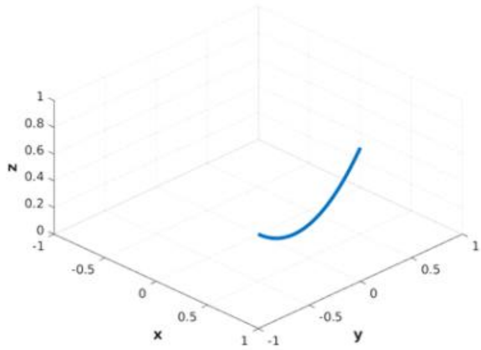




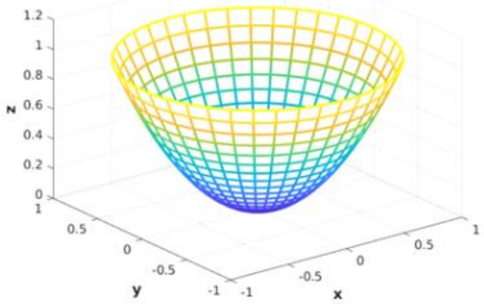
Funktionen $f(x,y) = x^2$ beror bara på x, så för att rita grafen, räcker rita $z = x^2$ för t.ex. $y = 0$, och sedan förskjuta i y-led.





Avståndet från (x,y) till origo är $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, så $f(x,y) = x^2 + y^2 = r^2$, som inte beror på vinkeln θ mot positiva x-axeln. Det räcker alltså att rita grafen $z = f(x,0) = x^2$ längs positiva x-axeln, där $x = r$, och sedan rotera kring z-axeln.





Går bara i väldigt speciella fall rita utan dator. Kan vara svårt förstå även med dator. Annan möjlighet:

Def En nivåkurva till en funktion $f(x,y)$ är alla punkter (x,y) s.a. $f(x,y)=k$ för ett givet $k\in\mathbb{R}$.

Ritar man nivåkurvor för olika värden av k får man en <u>höjdkarta</u> (contour map) som kan användas för att bättre förstå en funktion.

(Finns i orienterings eller fjällkartor)

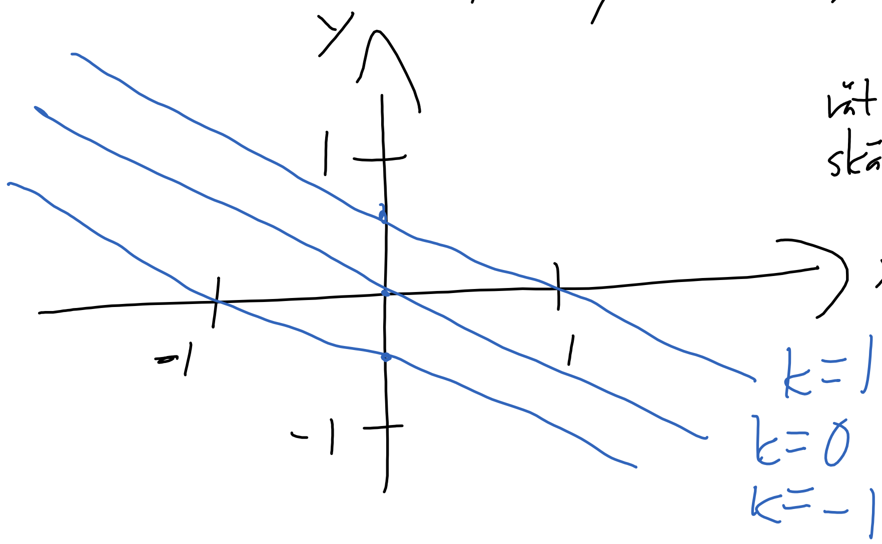
Ex Beskriv nivåkurvorna och rita höjdkartor för

a) $f(x,y)=x+2y$
b) $f(x,y)=x^2+y^2$
c) $f(x,y)=e^{xy}$

---

a) Nivåkurvor: $f(x,y)=x+2y=k \iff y=-\frac{x}{2}+\frac{k}{2}$

rät linje, lutning $-\frac{1}{2}$ skär y-axeln i $k/2$.



b) Nivåkurvor:

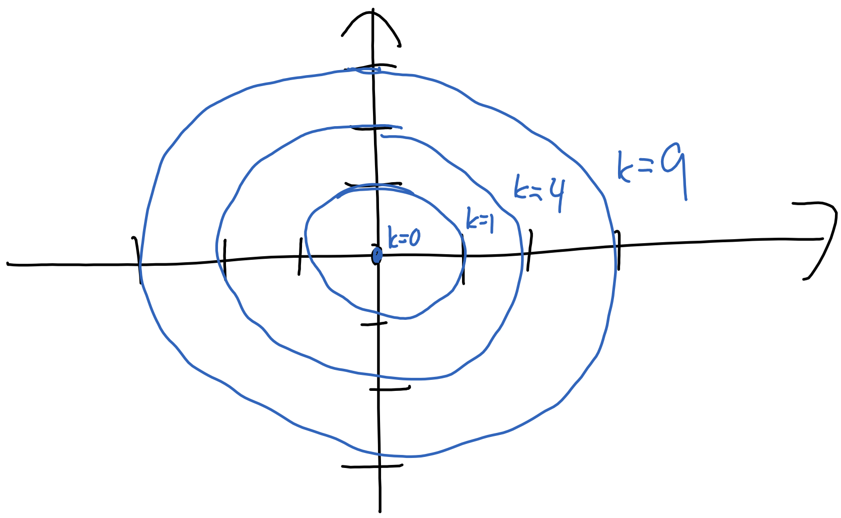
$f(x,y) = x^2+y^2 = k$

(olika utseende för olika k!)

Om $k<0$, tom!

om $k=0$, bara $x=y=0$

om $k>0$, $x^2+y^2 = k = (\sqrt{k})^2$
cirkel radie $\sqrt{k}$, centrum origo.



(kunde också valt andra k, t.ex. 0, 1, 2, 3 osv..)

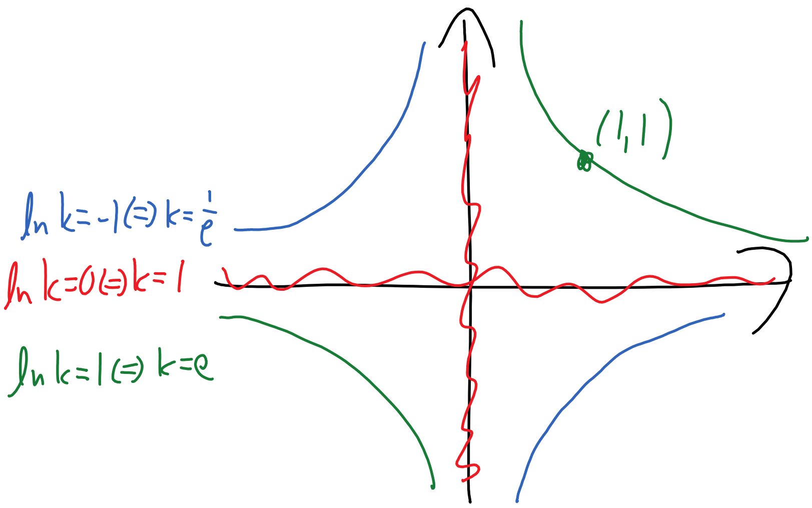
c) Nivåkurvor: $f(x,y) = e^{xy} = k$. $e^{xy}>0$, så tom om $k \leq 0$.

om $k>0$, kan ta logaritm: $xy = \ln k$.

Två fall:

1) om $x \neq 0$, $y = \dfrac{\ln k}{x}$

2 om $x=0$: $0 = \ln k$
$\Leftrightarrow k = 1$.



Man kan på liknande sätt studera funktioner $f(x,y,z)$ av tre variabler,

<u>men:</u> <u>Grafen</u> $w=f(x,y,z)$ befinner sig i ett rum med <u>fyra</u> dimensioner. Kan inte rita upp.

<u>däremot:</u> <u>Nivåytor</u> $f(x,y,z)=k$ kan (i vissa enkla fall) visualiseras.

<u>Ex</u> Beskriv nivåytorna till $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=$ (avståndet från (x,y,z) till origo $)^2$

$\Rightarrow$ nivåytan $f(x,y,z)=k$ är

$$\begin{cases} \text{en sfär av radie } \sqrt{k}\text{, centrum i origo} & \text{om } k \geq 0 \\ \text{tom} & \text{om } k<0. \end{cases}$$

(Betraktar origo som sfär med radie 0)