Sammanfattning Föreläsning 21

Rotationen (curl) av ett vektorfält $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ är

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle .$$

$\operatorname{rot} \nabla f = 0.$

Omvänt gäller:

Sats Om $\mathbf{F}$ är ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$ och

$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$

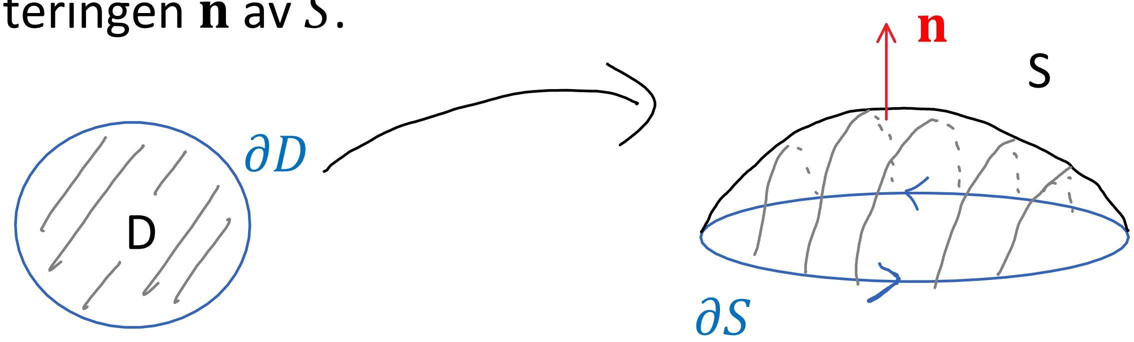
så är $\mathbf{F}$ konservativt, dvs.,

$\mathbf{F} = \nabla f$

för någon funktion f.

Om S är en yta parametriserad av $\mathbf{r}(u,v), (u,v) \in D$ så är dess *rand* ∂S bilden av randen ∂D av D.

Randen är *positivt orienterad* om den går moturs runt orienteringen $\mathbf{n}$ av S.



Stokes sats S orienterad yta med positivt orienterad rand $C = \partial S$. Då är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

- Motsvarar Greens formel för $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Ger geometrisk tolkning av $\operatorname{rot} \mathbf{F}$:
  Om placerar ett (oändligt litet) skovelhjul i (x, y, z), *så snurrar hjulet som snabbast om rotationsaxeln är* $(\operatorname{rot} \mathbf{F})(x, y, z)$

Kommentarer inför tentan

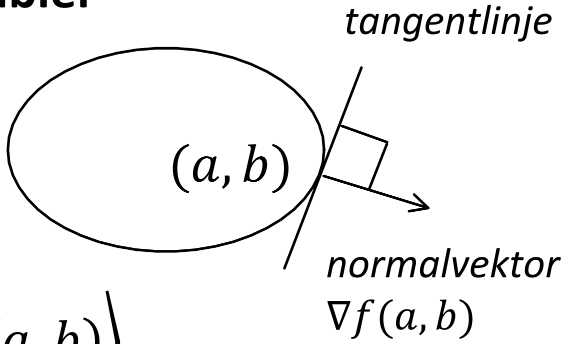
- Listan med *kursmål* på hemsidan specificerar vad ni förväntas kunna och vad tentan kommer testa på.
- Uppgifterna i *övningsprogrammet* testar på *alla* dessa målen.
- Duggorna i Möbius testar på många,
  men *långt från alla* målen.
- En del gamla tentor innehåller uppgifter om krökningsradie, det ingår inte i kursen i år.
- Kolla vad som finns med på formelbladet.

Repetition 1

Reellvärda funktioner av två variabler

$f(x, y)$ funktion

$f(x, y) = k$
nivåkurva



Gradient $\nabla f(a, b) = \left\langle f_x(a, b), f_y(a, b) \right\rangle$

Tangentlinje till nivåkurvan

$\nabla f(a, b) \cdot \langle x - a, y - b \rangle = 0$

Riktningsderivata i riktning $\mathbf{u}$ ($|\mathbf{u}| = 1$):

$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{u}$

Riktning där **växer som mest**

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$$

(om $\nabla f(a,b) \neq 0$)

Har motsvarigheter i tre variabler (tangentplan istället för tangentlinje, nivåyta istället för nivåkurva osv.)

$f(x,y)$ kan visualiseras med *grafen* $z = f(x,y)$.

Tangentplan till grafen av $f(x,y)$ *i* (a,b)

$$z = \underbrace{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)\big(y-b\big)}_{=L(x,y)}$$

z-värdet $L\big(x,y\big)$ kallas **lineariseringen**

om f deriverbar är det en bra approximation av f nära (a,b).

Grafen $z = f\big(x,y\big)$ är en nivåyta $F\big(x,y,z\big) = 0$ för $F\big(x,y,z\big) = z - f(x,y)$

tangentplanet till grafen av f = tangentplanet till nivåytan av F

Gränsvärden

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ om "$f(x,y)$ *hur nära* L *som helst så länge* (x,y) *är tillräckligt nära* (a,b)"

Strategier för att beräkna gränsvärden:

- Om sammansättning av elementära funktioner och *är definierad* (dvs. delar inte med 0 eller liknande), kan sätta in $(x,y) = (a,b)$

  Exempel $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \sin\left(\frac{\pi x^2}{y}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- Förkorta/förenkla så hamnar i förra fallet.

<u>Exempel</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4 - x^5}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\left(\left(y^2 - x^2\right)\left(y^2 + x^2\right)\right)}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\left(y^2 - x^2\right) = 0$$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- Försök skriva det som en sammansättning med en funktion av en variabel.

<u>Exempel</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2\ln\left(x^2+y^4\right)}{x^2+y^4-1}$

$\frac{2\ln\left(x^2+y^4\right)}{x^2+y^4-1} = h(f\left(x,y\right))$ där $h(t) = \frac{2\ln(t)}{t-1}$ och $f\left(x,y\right) = x^2 + y^4$

Eftersom $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f\left(x,y\right) = 1$ och $\lim_{t\to 1} h(t) = 2$
(standardgränsv. alt. l'Hospital, alt def. av derivata för $2\ln(t)$ i $t = 1$)
så $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2\ln\left(x^2+y^4\right)}{x^2+y^4-1} = 2.$

Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- *Instängningsregeln*: Om

  $$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$$

  och

  $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$$

  så är

  $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$$

Strategi för att visa att gränsvärde *inte* existerar

- Om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f\big(x,y\big) = L$ så måste
  $\lim_{t\to t_0} f\big(\mathbf{r}(t)\big) = L$
  för *alla* kurvor $\mathbf{r}(t)$ med $\mathbf{r}\big(t_0\big) = \langle a, b\rangle$.

  Om då får olika gränsvärden, t.ex., längs olika räta linjer genom (a, b) så finns gränsvärdet *inte.*