Ex (forts.) Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

Såg förra gången att gränsvärdet är 0 längs alla räta linjer genom origo. Ska nu visa att gränsv. är 0.

Verkar inte gå att förenkla eller skriva som sammansättning. Försöker med instängningsregeln.

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = |x| \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x|$$

Så om $f(x,y) = -|x|$, $g(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, $h(x,y) = |x|$

är alltså $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$

och eftersom $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x)$ är enligt

instängningsregeln $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$

Lokala extremvärden
Om $f\left(x,y\right)$ har lokalt max/min i (a,b) så är (a,b) en **kritisk punkt**, dvs
$f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0$

Modelfall:

x^2+y^2	*lokalt min* i $(0,0)$
$-x^2\ -y^2$	*lokalt max* i $(0,0)$
$-x^2+y^2, x^2-y^2$	*sadelpunkt* i $(0,0)$, dvs kritisk punkt men varken lokalt max eller min

Andraderivatatestet:
(a,b) en kritisk punkt till $f(x,y)$

$$D(a,b)=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$$

$\underline{D>0}$: a) $f_{xx}(a,b)>0 \Rightarrow$ *lokalt min*
b) $f_{xx}(a,b)<0 \Rightarrow$ *lokalt max*

$\underline{D<0}$: *sadelpunkt*

Hur komma ihåg? Jämför med modellfallen

Uppgift 14.7.8

Bestäm lokala max/min och sadelpunkter till

$$f(x,y) = y(e^x - 1)$$

Kritiska punkter $\begin{cases} f_x = ye^x = 0 \underset{(e^x \neq 0)}{\iff} y = 0 \\ f_y = e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = \ln 1 = 0 \end{cases}$

Så en enda kritisk punkt i $(x,y) = (0,0)$.

$f_{xx} = ye^x$ $\qquad f_{xx}(0,0) = 0$

$f_{xy} = e^x$ $\qquad f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 1$

$f_{yy} = 0$ $\qquad f_{yy}(0,0) = 0$

$$D(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0^2 - 1^2 = -1 < 0$$

så $(0,0)$ är en sadelpunkt enl. andraderivatatestet.

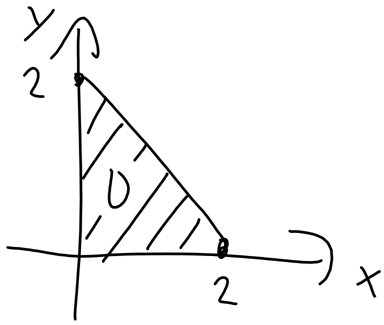
Globala extremvärden

Om $f(x,y)$ kontinuerlig på sluten begränsad mängd D så har f globalt max och min på D.

Om f deriverbar kan de bestämmas genom att jämföra värdena i:

1) Kritiska punkter inuti D
2) Punkter på randen till D. Kan preciseras om parametriserar randen med kurvor:
   a. Kritiska punkter längs randkurvorna
   b. "Hörn", dvs ändpunkter till randkurvorna.

Ex Bestäm globala max och min av $xy(1-x-y)$ på triangeln D med hörn i $(0,0)$, $(0,2)$ och $(2,0)$.



1) Kritiska punkter i D:

$$\begin{cases} f_x = y(1-x-y) + xy\cdot(-1) = 0 \Leftrightarrow y(1-2x-y) = 0 & (1) \\ f_y = x(1-x-y) + xy\cdot(-1) = 0 \Leftrightarrow x(1-x-2y) = 0 & (2) \end{cases}$$

I (1), antingen $y=0$ el. $1-2x-y=0$. Om $y=0$ ger (2) att $x(1-x)=0 \Rightarrow x=0$ el. $x=1$. Detta ger två kritiska punkter $(0,0)$ och $(1,0)$, båda på randen, kommer med i nästa steg, så kan strunta i nu, och ersätta (1) med $1-2x-y=0$.

På samma sätt, kan anta $x \neq 0$ i (2), så vill då lösa:

$$\begin{cases} 1-2x-y=0 & (1') \\ 1-x-2y=0 & (2') \end{cases}$$

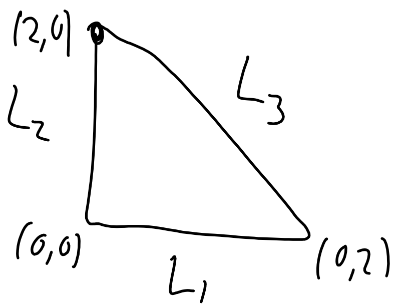
$(1') \Leftrightarrow y = 1-2x$. Sätter in i $(2')$:

$$1-x-(2-4x)=0 \Leftrightarrow -1+3x=0 \Leftrightarrow x = 1/3.$$

Sätter in i $(1')$: $x = 1/3 \Rightarrow y = 1-2x = 1/3$.

Kandidat: $\boxed{f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}}$ (kollar nedan att $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ i triangeln)

2) Parametriserar randen:



a) Kritiska punkter längs randkurvor:

$\underline{L_1}$ $\mathbf{r}_1(t) = (t,0)$, $0<t<2$

$g_1(t) = f(\mathbf{r}_1(t)) = f(t,0) = 0$

krit. punkter: $g_1'(t) = 0 \Rightarrow$ alla $0<t<2$ krit. punkter.

$\underline{\text{Kandidater:}}$ $\boxed{f(t,0) = 0}$ $0<t<2$.

$\underline{L_2}$ som för L_1, ger

Kandidater: $\boxed{f(0,t)=0}$ $0<t<2$.

$\underline{L_3}$ $\quad \mathbf{r}_3(t) = \langle t, 2-t \rangle, \quad 0 < t < 2$

$\left(\mathbf{r}_3(\tfrac{1}{3}) = \langle \tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3} \rangle, \right.$ så $(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$ nedanför L_3, dvs innanför triangeln)

(alt. t.ex. $\mathbf{r}_3(t) = \langle 0,2\rangle + t(\langle 2,0\rangle - \langle 0,2\rangle) = \langle 2t, 2-2t\rangle, \quad 0 \leq t \leq 1$)

$$g_3(t) = f(t, 2-t) = t(2-t)(1-t-(2-t)) = -t(2-t) = t^2 - 2t.$$

Krit. punkter $g_3'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Kandidat: $\boxed{g_3(1) = f(1,1) = -1}$

b) "Hörn", dvs. ändpunkter till randkurvor.

Kandidater $\boxed{f(0,0) = 0}$ $\boxed{f(2,0) = 0}$

$\boxed{f(0,2) = 0}$

$\underline{\text{Svar:}}$ min -1 i $(1,1)$ och

max $\frac{1}{27}$ i $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Kurvor i rummet

Kurva C parametriserad av $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$,
$a \leq t \leq b$

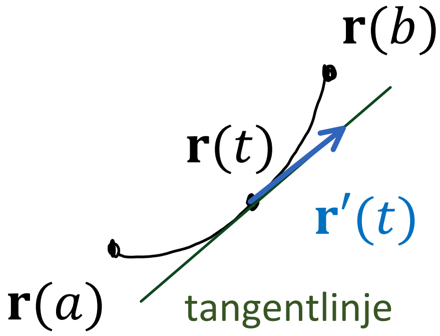
Tangentvektor $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$
ger riktningsvektor för tangentlinjen genom $\mathbf{r}(t)$:
$L(s) = \mathbf{r}(t) + s\mathbf{r}'(t)$

Längd $\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$

Kurvintegral av funktion f:

$\int_C f\, ds = \int_a^b f\big(\mathbf{r}(t)\big)|\mathbf{r}'(t)|dt$

$(ds = |\mathbf{r}'(t)|dt)$



Dubbelintegraler

$f(x,y) \geq 0$:

$\iint_D f(x,y)\, dA = volymen\ av\ området\ under\ grafen\ z = f(x,y)$

Kan beräknas med u*pprepad integral t.ex. om*

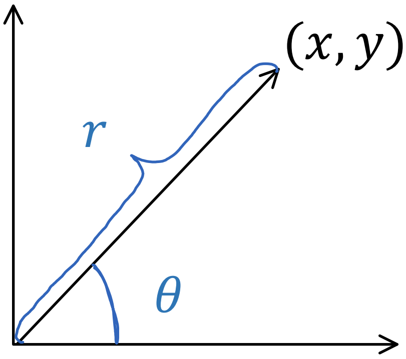
$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}$ är

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

och motsvarande om gränser i x beror på y.

Polära koordinater

$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$



Integration över *"polär rektangel" D:*

$a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$

$\underline{dA = r\, d\theta\, dr = r\, dr\, d\theta}$:

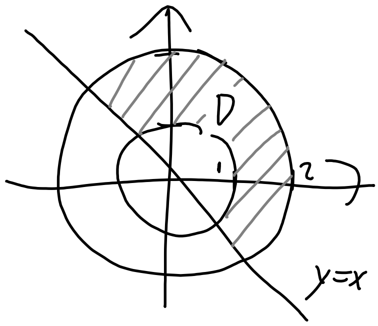
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

(eller i andra ordningen med integration i θ ytterst)

Ex Beräkna masscentrum av delen D av

$\{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ som ligger över linjen $y=-x$,

där D antas ha konstant densitet 1.



D i polära koord:

$0 \le r \le 1$

$-\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4.$

massa $\quad m = \iint_D dA = \int_1^2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} r \, d\theta \, dr = \pi \int_1^2 r \, dr = \pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$

masscentrum $\quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$

$$M_x = \iint_D x \, dA = \int_1^2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} r\cos\theta \, r \, d\theta \, dr = \int_1^2 r^2 \left[\sin\theta \right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} dr =$$

$$= 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 r^2 dr = \sqrt{2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

av symmetriskäl, $\bar{y} = \bar{x}$, så masscentrum är

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{7\sqrt{2}/3}{3\pi/2}, \frac{7\sqrt{2}/3}{3\pi/2} \right) = \left(\frac{14\sqrt{2}}{9\pi}, \frac{14\sqrt{2}}{9\pi} \right).$$

Trippelintegraler

Upprepade integraler, t.ex.:

$$E = \{ (x,y,z) \mid c \le y \le d, a(y) \le z \le b(y), e(y,z) \le x \le f(y,z) \}$$

$$\iiint_E g(x,y,z)\, dV = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} \int_{e(y,z)}^{f(y,z)} g(x,y,z)\, dx\, dz\, dy$$

$\iiint_E \mathrm{d}V =$ volym av området E

<u>Ex</u> Beräkna $\iiint_E e^x dV$, där

$$E = \{ (x,y,z) \mid y \le x \le z,\ 0 \le y \le z,\ 0 \le z \le 1 \}$$

$$\iiint_E e^x dV = \int_0^1 \int_0^z \int_y^z e^x dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^z \left[e^x \right]_{x=y}^{x=z} dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^z e^z - e^y\, dy\, dz = \int_0^1 \left[y e^z - e^y \right]_{y=0}^{y=z} dz =$$

$$= \int_0^1 z e^z - e^z + 1\, dz = 1 + \int_0^1 \underset{F}{(z-1)}\, \underset{g}{e^z}\, dz =$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{matrix} \right\} = 1 + \left[\underset{F}{(z-1)}\, \underset{G}{e^z} \right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{e^z}\, dz}_{=e-1} = 3 - e.$$