

## Repetition 2

### Strategier för att beräkna gränsvärden (forts)

- *Instängningsregeln*: Om

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$$

och

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y)$$

så är

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L$$

## Lokala extremvärden

Om  $f(x, y)$  har lokalt max/min i  $(a, b)$  så är  $(a, b)$  en **kritisk punkt**, dvs  $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$

Modelfall:

$x^2 + y^2$                       *lokalt min* i  $(0,0)$

$-x^2 - y^2$                       *lokalt max* i  $(0,0)$

$-x^2 + y^2, x^2 - y^2$         *sadelpunkt* i  $(0,0)$ , dvs kritisk punkt  
men varken lokalt max eller min

## Andraderivatatestet:

$(a, b)$  en kritisk punkt till  $f(x, y)$

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

$D > 0$ :     a)  $f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow$  lokalt min

                  b)  $f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow$  lokalt max

$D < 0$ :     sadelpunkt

Hur komma ihåg? Jämför med modellfallen

## Globala extremvärden

Om  $f(x, y)$  kontinuerlig på sluten begränsad mängd  $D$  så har  $f$  globalt max och min på  $D$ .

Om  $f$  deriverbar kan bestämmas genom att jämföra värdena i:

- 1) Kritiska punkter inuti  $D$
- 2) Punkter på randen till  $D$ . Kan preciseras om parametriserar randen med kurvor:
  - a. Kritiska punkter längs randkurvorna
  - b. "Hörn", dvs ändpunkter till randkurvorna.

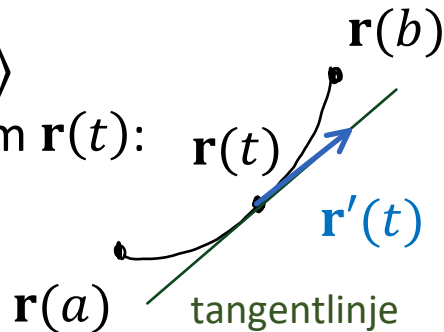
## Kurvor i rummet

Kurva  $C$  parametriserad av  $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ ,  $a \leq t \leq b$

Tangentvektor  $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$

ger riktningsvektor för tangentlinjen genom  $\mathbf{r}(t)$ :

$$L(s) = \mathbf{r}(t) + s\mathbf{r}'(t)$$



Längd  $\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$

Kurvintegral av funktion  $f$ :  $\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$   
( $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$ )

## Dubbelintegraler

$$f(x, y) \geq 0:$$

$\iint_D f(x, y) dA = \text{volymen av området under grafen } z = f(x, y)$

Kan beräknas med *upprepad integral t.ex. om*

$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}$  är

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$$

och motsvarande om gränser i  $x$  beror på  $y$ .

## Polära koordinater

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

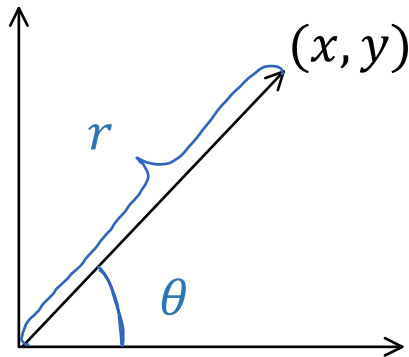
Integration över "polär rektangel"  $D$ :

$$a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$$

$$\underline{dA = r d\theta dr = r dr d\theta:}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

(eller i andra ordningen med integration i  $\theta$  ytterst)



## Trippelintegraler

Upprepade integraler, t.ex.:

$$E = \{ (x, y, z) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq z \leq b(y), e(y, z) \leq x \leq f(y, z) \}$$

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} \int_{e(y, z)}^{f(y, z)} g(x, y, z) dx dz dy$$

$$\iiint_E dV = \text{volym av området } E$$