Tentamensskrivning I Matematisk Analys I Flera Variabler 2013-10-21
Kurskod LMA017, Högskolepoäng 7.5, Skrivtid kl 14.00-18.00
Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa och formelsamling i flervariabelanalys (5 blad)
Telefonvakt: Damiano Ognissanti 0734-407926

Givetvis krävs fullständiga lösningar och exakta svar!

1. Bevisa att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2}\cdot e^{y^2}-1}{x^2+y^2}=1$ (6p)

2. Beräkna krökningsradien till kurvan $\begin{cases} x(t)=3\cdot\sin(t) \\ y(t)=-5\cdot\cos(t) \\ z(t)=4t \end{cases}$ i punkten $t=2\pi$ (6p)

3. Uppskatta $\arcsin\left(\frac{2.02}{3.95}\right)$ med hjälp av approximationssatsen. (6p)

4. Bestäm ev. lokala maximi-, minimi- och terasspunkter till $f(x,y)=2x^2+2y^2+3xy-7\ln(xy)$ där $x>0, y>0$ (7p)

5. Beräkna volymen av den kropp som alstras då kurvan $y=x\sqrt{\sin(x)}$ på intervallet $0\leqslant x\leqslant\pi$ roterar kring x-axeln. (6p)

6. Beräkna kurvintegralen $\int_C 2xy^{\frac{3}{2}}dx+\frac{3}{2}x^2\sqrt{y}dy$ där C är kurvan $y=\sin(\pi x)$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ (6p)

7. Beräkna tangentplanet och normalen till nivåytan $z\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ i punkten $(x,y)=(1,1)$ (6p)

8. a) Rita kurvan $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=9$ (1p)

   b) Beräkna arean av den yta som alstras då kurvan $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=9$ roterar kring x-axeln. (6p)

   Tips. Utför variabelsubstitution $\begin{cases} x(t)=27\cos^3(t) \\ y(t)=27\sin^3(t) \end{cases}$

Lycka till!

LMA017

Svar till tentamen i Flervariabelanalys 2013-10-21

1. Svar: Sätt $z=x^2+y^2$ och uttnyttja standardgränsvärdet $\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$

2. Svar: $R=5$

$r'(2\pi)=(3,0,4)$, $r''(2\pi)=(0,5,0)$ vilket ger $K=\frac{|(3,0,4)\times(0,5,0)|}{|(3,0,4)|^3}=\frac{25}{125}=\frac{1}{5}$ alltså är krökningsradien $R=5$

3. Svar: 0.5366

Sätt $f(x,y)=\arcsin(\frac{x}{y})$ och låt $x=2, y=4, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.05$

Approximationssatsen ger $\arcsin(\frac{2.02}{3.95})-\arcsin(\frac{2}{4})=0.02\cdot\frac{1}{4\cdot\sqrt{1-\frac{2^2}{4^2}}}+0.05\frac{2}{4^2\sqrt{1-\frac{2^2}{4^2}}}$

dvs $\arcsin(\frac{2.02}{3.95})\approx\arcsin(1/2)+\frac{0.02}{4\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}}+\frac{0.1}{16\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{\pi}{6}+\frac{0.18}{16\sqrt{\frac{3}{4}}}\approx 0.5366$

4. Svar: Lokalt minimum i punkten $(1,1)$

$f(x,y)=2x^2+2y^2+3xy-7\ln(xy)$

$f'_x(x,y)=4x+3y-\frac{7}{x}$

$f'_y(x,y)=4y+3x-\frac{7}{y}$

Om vi först sätter:

$f'_x=0, \quad f'_y=0$

dvs.

$4x+3y-\frac{7}{x}=0$ och $4y+3x-\frac{7}{y}=0$

Om vi multiplicerar första raden med x och andra med y får vi:

$4x^2+3xy-7=0$

$4y^2+3xy-7=0$

Sätter vi ekvationerna lika med varandra får vi nu $4x^2=4y^2$ dvs $x=y$ (vi behöver inte studera $x=-y$ eftersom båda antas vara positiva i uppgiften).

Om $x=y$ får vi att exempelvis $4x+3x-\frac{7}{x}=0$ vilket ger att $x^2=1$ och alltså $x=1$ och alltså $y=1$.

Vi har alltså hittat en punkt, nämligen $(1,1)$.

Om vi studerar andraderivatan i punkten får vi:

$f''_{xx}(1,1)=4+7=11$

$f''_{yy}(1,1)=4+7=11$

$f''_{xy}=f''_{yx}=3$

dvs $D=121-9>0$ samt $f''_{xx}=11>0$, alltså har vi ett lokalt minimum i punkten $(1,1)$

5. Svar: $\pi(\pi^2-4)$

Vi skriver upp formeln för volymberäkning $\pi\int_0^\pi x^2\sin(x)\,dx$ varpå vi upptäcker att vi kan partialintegrera:

$$\pi\int_0^\pi x^2\sin(x)\,dx=\pi([-x^2\cos(x)]_0^\pi+\int_0^\pi 2x\cos(x)\,dx)$$

Vi partialintegrerar igen:

$$\pi([-x^2\cos(x)]_0^\pi+\underbrace{[2x\sin(x)]_0^\pi}_{=0}-\int_0^\pi 2\sin(x)\,dx)$$

Sista integralen beräknas och vi får slutligen:

$$\pi([-x^2\cos(x)+2\cos(x)]_0^\pi)=\pi((2-\pi^2)\cdot(-1)-2)=\pi(\pi^2-4)$$

6. Svar: 0

Vi noterar att $P'_y=Q'_x=3x\sqrt{y}$ och att fältet därmed är konservativt, vilket i sin tur innebär att arbetet är oberoende av vägen.

Alternativ 1: Vi kan alltså beräkna $\Phi(x,y)=x^2y^{\frac{3}{2}}$ och sedan $\Phi(1,0)-\Phi(-1,0)=0$

Alternativ 2: Vi väljer en ny väg $y=0, 0<x<1$ vilket ger $\int_{-1}^{1}0\,dx=0$

7. Svar: Tangenten är $2x-2y+3z=2\pi$ och normalen är $\frac{6}{\pi}(x-1)=-\frac{6}{\pi}(y-1)=\frac{4}{\pi}(z-\frac{2\pi}{3})$

Först tar vi reda på z värdet.

$x=1, y=1$ ger $z=\frac{2\pi}{3}$

Nu sätter vi $f(x,y,z)=z\arctan(\sqrt{\frac{x}{y}})-\frac{\pi^2}{6}$ och beräknar gradienten

$$\nabla f=\left(\frac{z}{(1+\frac{x}{y})\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y},\quad -\frac{xz}{(1+\frac{x}{y})\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2},\quad \arctan(\sqrt{\frac{x}{y}})\right)$$

dvs.

$$\nabla f(1,1,\frac{2\pi}{3})=(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$$

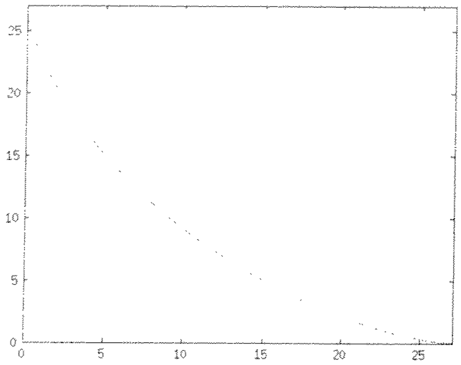
Således blir tangentplanets ekvation

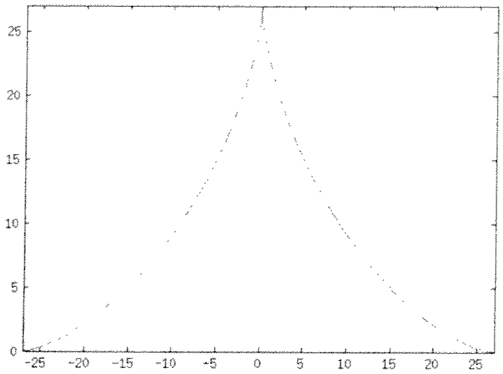
$$\frac{\pi}{6}(x-1)-\frac{\pi}{6}(y-1)+\frac{\pi}{4}(z-\frac{2\pi}{3})=0\Leftrightarrow(x-1)-(y-1)+\frac{3}{2}z-\pi=0\Leftrightarrow 2x-2y+3z=2\pi$$

och normalen blir:

$$\frac{6}{\pi}(x-1)=-\frac{6}{\pi}(y-1)=\frac{4}{\pi}(z-\frac{2\pi}{3})$$

8a) Svar: Vi ritar kurvan $y=(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, både tolkningen $x>0$ eller x reellt godkänns





b) Svar: $\dfrac{4374\pi}{5}$ eller $\dfrac{8748\pi}{5}$ beroende på tolkning i uppgift a)

Vi antar nedan att $x>0$ så gränserna för rotation kring x axeln blir $0\le x\le 27$. P.g.a. symmetri kommer det andra svaret fås genom att multiplicera det första med 2. (Man kan även räkna med gränserna $-27\le x\le 27$ och på så sätt få ut arean.

Ansätt $y=(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

Då erhålls $y'=\dfrac{3}{2}(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\cdot(-\dfrac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}})=-x^{-\frac{1}{3}}(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

och $(y')^2=x^{-\frac{2}{3}}(9-x^{\frac{2}{3}})=9\mathrm{x}^{-\frac{2}{3}}-1$

så $1+(y')^2=9\mathrm{x}^{-\frac{2}{3}}$

och $\sqrt{1+(y')^2}=3\mathrm{x}^{-\frac{1}{3}}$

Nu används formeln $2\pi\int_I y\sqrt{1+(y')^2}\,dt=6\pi\int_I yx^{-\frac{1}{3}}dt$

Alternativ 1: från bilden i a) ser vi att gränserna blir $0\le x\le 27$ om vi roterar kurvan kring x-axeln, alltså har vi: $6\pi\int_0^{27}(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx$

Vi noterar $-\dfrac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$ är den inre derivatan av $(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ och att vår integral alltså blir

$$6\pi\left[-\frac{3}{5}(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}\right]_0^{27}=-\frac{18\pi}{5}[(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}]_0^{27}=-\frac{18\pi}{5}(0-3^5)=\frac{3^5\cdot 18\pi}{5}=\frac{4374\pi}{5}$$

Alternativ 2: Vi använder variabelsubstitution $x(t)=27\cos^3(t),\ y(t)=27\sin^3(t)$ vilket ger $dx=-81\cos^2(t)\sin(t)dt$ och gränserna $\dfrac{\pi}{2}\le t\le 0$. Integralen blir således

$$6\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{27\sin^3(t)}{3\cos(t)}\cdot(-81\cos^2(t)\sin(t))dt=-\frac{27\cdot 81\cdot 6\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4(t)\cdot\cos(t)dt=$$

$$-9\cdot 81\cdot 6\pi\left[\frac{\sin^5(t)}{5}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}=-4374\pi(0-\frac{1}{5})=\frac{4374\pi}{5}$$

Alternativ 3: Använd formeln $2\pi\int_I y\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$ och variabelsubstitutionen för att få

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 27\sin^3(t)\sqrt{(-81\cos^2(t)\sin(t))^2+(81\sin^2(t)\cos(t))^2}\,dt$$

Vi förenklar uttrycket $\sqrt{(-81\cos^2(t)\sin(t))^2+(81\sin^2(t)\cos(t))^2}$:

$$\sqrt{(-81\cos^2(t)\sin(t))^2+(81\sin^2(t)\cos(t))^2}=$$

$$=\sqrt{81^2(\cos^4(t)\sin^2(t)+\sin^4(t)\cos^2(t))}=81\sqrt{(\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t)))}=$$

$$=81\sqrt{(\cos^2(t)\sin^2(t))}=81\cos(t)\sin(t)$$

Vår integral är således $81\cdot 27\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(t)\cos(t)\,dt=4374\pi\left[\frac{\sin^5(t)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4374\pi}{5}$