Matematik
Chalmers
A. Stolin

Tentamensskrivning i
Matematisk Analys i Flera Variabler, LMA 017

18 augusti 2016, $8^{30} - 12^{30}$

1. Beräkna längden av kurvan

$$x = 3t^2,\ y = 8(t+1)^{3/2},\quad 0 < t < 2$$

2. Beräkna krökningsradien för kurvan

$$x = 2t,\ y = 3t^2\ ,\ z = 3t^3$$

i punkten $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9})$.

3. Beräkna

$$lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{1 - cos(a + 2b)}{a^2 + 4b^2 + 4ab}$$

4. Bestäm lokala max.-, min.- och sadelpunkter för funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 5x - xy + ln(\frac{x^2}{y})$$

5. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C 3x^2y\ dx + (x^3 + 4y^3)\ dy$$

där C är parabelbågen $y^2 = x$ från punkten $(1, -1)$ till punkten $(1, 1)$.

6. Beräkna

$$\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}\ dx\ dy$$

där D är området $x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0$.

7. Beräkna arean av den del av ytan $f(x, y) = xy$ vars projektion på xy-planet är följande område $x^2 + y^2 \leq 3,\ y > 0,\ y > x\sqrt{3}$. **VÄND!!!**

8. Låt $\mathbf{F} = (x(x^2 + y^2 + z^2), y(x^2 + y^2 + z^2), z(x^2 + y^2 + z^2))$ vara hastighetsvektorn i en vätskeströmning. Beräkna nettoflödet ut ur den totala begränsningsytan till cylindern

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 3.$$

Alla problem utom två sista ger 6p max. Varje av dem två sista problemen ger 7p max.

Lycka till!

FORMELSAMLING I FLERVARIABELANALYS

Kurva i rummet på parameterform:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ eller med vektorbet. $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Speciellt **Räta linjens ekvation**: (tangent och normal) $$\begin{cases} x = x_o + v_x t \\ y = y_o + v_y t \\ z = z_o + v_z t \end{cases}$$

Area under plan kurva på parameterform: $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$.

Polär form $r = r(\theta)$ skrivs på parameterform: $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$

Båglängd för kurva på parameterform: $L = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt$, speciellt

i planet: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$, eller $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

och i rummet: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$.

Tyngdpunkt för kurva i planet:

$$x_T = \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \;, \qquad y_T = \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

Krökning för kurva: $K(t) = \dfrac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3}$,

speciellt i planet: $K(x) = \dfrac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$.

Krökningsradie: $R = \dfrac{1}{K}$

Torsion: $\tau = \dfrac{(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|^2}$

Approximationssatsen: $\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}_{\Delta f \text{ differens}} \approx \underbrace{f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y}_{df \text{ differential}}$

Kedjeregeln: $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \text{och} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \text{och} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Taylors formel i två variabler:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \\ & \frac{1}{2!}[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2] + \\ & \frac{1}{3!}[f'''_{xxx}(a,b)(x-a)^3 + 3f'''_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b) + \\ & \quad 3f'''_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + f'''_{yyy}(a,b)(y-b)^3] + \ldots \end{aligned}$$

Max.- , min.- och sadelpunkter:

$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$, $\quad D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$

$D > 0$ och $\begin{cases} f''_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow (a,b) \text{ lok. minp.} \\ f''_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow (a,b) \text{ lok. maxp.} \end{cases}$, $\quad D < 0 \Rightarrow (a,b)$ sadelp.

Lagranges multiplikatormetod:

$f(x,y)$ maximeras eller minimeras under bivillkoret $g(x,y) = 0$.

Bilda $H = f - \lambda g$ och lös ekv.syst. $H'_x = 0$, $H'_y = 0$ och $g = 0$.

Gradient: $\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ **Riktningsderivata:** $f'_e = \mathbf{e} \cdot \text{grad } f(a,b,c)$

$[-|\text{grad } f(a,b,c)| \le f'_e \le |\text{grad } f(a,b,c)|]$

Nivåyta: $g(x,y,z) = z - f(x,y) = C$, **Normalvektor:** $\mathbf{n} = \text{grad } g$,

(Tangent-) planets ekvation: $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$.

Skivformeln: $V = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\, dx$ där x-axeln är rotationsaxel.

Guldins regel: Rotationsvolymen = Arean · Tyngdpunktens väg .

Dubbelintegral, speciellt: $\iint_D dxdy = A_D$.

Variabelsubstitution: $dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$.

Speciellt polära koord: $\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}$, $x^2 + y^2 = r^2$, $dxdy = r\, dr\, dv$.

Geometriskt moment med avseende på linjen $x = a$ resp. $y = b$:

$M_y = \iint_D (x-a)\, dxdy$ resp. $M_x = \iint_D (y-b)\, dxdy$.

Tyngdpunkt för yta i planet: $x_T = \frac{1}{A_D}\iint_D x\, dxdy$, $y_T = \frac{1}{A_D}\iint_D y\, dxdy$.

Tröghetsmoment med avseende på linjen $x = a$ resp. $y = b$:

$I_y = \iint_D (x-a)^2 dxdy$ resp. $I_x = \iint_D (y-b)^2 dxdy$.

Polärt tröghetsmoment med avseende på punkten (a,b):

$I_\theta = \iint_D [(x-a)^2 + (y-b)^2]\, dxdy = I_y + I_x$.

Trippelintegral, speciellt: $\iiint_D dxdydz = V_D$.

Variabelsubstitution, speciellt sfäriska (rymdpolära) koordinater:

$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos v \\ y = r\sin\theta\sin v \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $dxdydz = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, dv$.

och cylinderkoordinater:

$\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \\ z = w \end{cases}$, $x^2 + y^2 = r^2$, $dxdydz = r\, dr\, dv\, dw$.

Tyngdpunkt för kropp i rummet:

$$x_T = \frac{1}{V_D}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz\,,\quad y_T = \frac{1}{V_D}\iiint_D y\,dx\,dy\,dz\,,\quad z_T = \frac{1}{V_D}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz.$$

Kurvintegral: $W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy\,.$

i 2D

Greens formel: $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy\,.$

där C är sluten, ett varv moturs, runt D.

$\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ **gradientfält** om **potentialfunktion** $\Phi(x,y)$:

$\mathbf{F} = (P, Q) = (\Phi'_x, \Phi'_y) = \text{grad}\,\Phi\,.$

Exakt differentialform: $d\Phi = \Phi'_x\,dx + \Phi'_y\,dy = P\,dx + Q\,dy\,.$

Då gäller: $\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C d\Phi = [\Phi]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}$

Exakt differentialekvation: $d\phi(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

har allmän lösning $\phi(x,y) = C\,.$

Yta i rummet på parameterform:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

eller med vektorbeteckning
$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$

har **normalvektorn**: $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\,.$

Arean av en yta på parameterform: $A_S = \iint_{D_{uv}} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,du\,dv\,.$

Arean av en funktionsyta: $A_S = \iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\;dx\,dy\,.$

Arean av en rotationsyta: $A_S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\;dx$

där x-axeln är rotationsaxel.

Ytintegral av funktionen g över ytan S:

$$\iint_S g\,dS = \iint_{D_{uv}} g(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,du\,dv$$

$$\begin{Bmatrix}\text{eller}\\ \text{spec.}\end{Bmatrix} = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\;dxdy$$

Tyngdpunkt för yta i rummet:

$$x_T = \frac{1}{A_S}\iint_S x\,dS \;,\quad y_T = \frac{1}{A_S}\iint_S y\,dS \;,\quad z_T = \frac{1}{A_S}\iint_S z\,dS \;.$$

Normalytintegral av vektorfältet $\mathbf{F}$ över ytan S:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \iint_{D_{uv}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\,du\,dv$$

$$\begin{Bmatrix}\text{eller}\\ \text{spec.}\end{Bmatrix} = \iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy$$

Källtäthet (-styrka): $\operatorname{div}\mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$

Gauss' divergenssats: $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\;dxdydz$

där S är sluten med normal utåt.

Virvelvektor: $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)$

Stokes' sats: $\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \iint_{D_{uv}} \operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\,du\,dv$

där C är sluten kurva runt S.

$\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{F} = \operatorname{grad}\Phi$

Rotationsvolym då kurvan roterar kring y-axeln. $y=f(x) \Rightarrow V=\pi\int_a^b x^2 f'(x)\,dx$

Arean av en rotationsyta

$$A_s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

där x-axeln är rotationsaxel för

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\quad t_1<t<t_2$$

Kurvintegral i 3D:

$$A = \int_C \bar{F}\bullet d\bar{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \quad \text{med}$$

$$\bar{F} = (P, Q, R), \quad C = (x(t), y(t), z(t)) \quad t_0 \le t \le t_1$$

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \left(P(x,y,z)\cdot\dot{x} + Q(x,y,z)\cdot\dot{y} + R(x,y,z)\cdot\dot{z}\right)dt\,.$$

Om rot $\bar{F} = 0$, existerar φ sådan att

$\bar{F} = \text{grad}\,\varphi$ och $\int_C \bar{F}\bullet d\bar{r} = \varphi(\text{ändpunkt}) - \varphi(\text{startpunkt})$.

$\int_C \bar{F}\bullet d\bar{r}$ är oberoende av C mellan $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ och $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$, om rot $\bar{F}=0$.

VIKTIGA :: DERIVATOR OCH INTEGRALER

De derivator och integraler som presenteras här förväntas ni kunna utantill.

DERIVATOR ::

Funktion	Derivata	kommentar
x^r	rx^{r-1}	$r \neq 0$
e^x	e^x	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	eller $\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

PRIMITIVA FUNKTIONER ::

f	$\int f\,dx$	kommentar
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	$r \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\frac{1}{1+(ax)^2}$	$\frac{1}{a}\arctan ax + C$	
$\ln x$	$x\ln x - x + C$	partiell integration!
$\frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}}$	$\frac{1}{a}\arcsin(ax) + C$	
e^x	$e^x + C$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	