1) Beräkna längden av kurvan
$x = 3t^2, \quad y = 8(t+1)^{3/2}, \quad 0<t<2$

Lösning:

$$x'(t) = 6t, \quad y'(t) = 8\cdot 3/2 \cdot \sqrt{t+1} = 12\sqrt{t+1}$$
$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2} = \sqrt{6^2t^2+6^2\cdot 4(t+1)} = 6\sqrt{t^2+4t+4}$$
$$= 6\sqrt{(t+2)^2} = 6(t+2) \quad (t \geq -2)$$
$$\text{längd} = \int_0^2 \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt = \int_0^2 6(t+2)\,dt = \left[3t^2+12t\right]_0^2 =$$
$$= 3\cdot 4+12\cdot 2-0-0 = 12+24=36.$$

Svar: Längden är 36.

---

2) Beräkna krökningsradien för kurvan
$x=2t, \quad y=3t^2, \quad z=3t^3$
i punkten $(x,y,z) = (2/3, 1/3, 1/9)$

Lösning:

$$r'(t) = (2, 6t, 9t^2)$$
$$r''(t) = (0, 6, 18t)$$

$$(x,y,z) = (2t, 3t^2, 3t^3) = (2/3, 1/3, 1/9)$$
$$\Rightarrow 2t = 2/3 \Rightarrow t = 1/3.$$

$$r'(1/3) = (2, 2, 1)$$
$$r''(1/3) = (0, 6, 6)$$
$$r'(1/3)\times r''(1/3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} =$$
$$= (2\cdot 6-6\cdot 1, -2\cdot 6+0\cdot 1, 2\cdot 6-0\cdot 2) = (6, -12, 12)$$

Krökningsradie i $t = 1/3$:
$$R = 1/\kappa = \frac{|r'(t)|^3}{|r'\times r''(t)|} = \frac{\left(\sqrt{2^2+2^2+1}\right)^3}{\sqrt{6^2+(-12)^2+12^2}} = \frac{(\sqrt{9})^3}{6\sqrt{9}} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}.$$

Svar: $R = 3/2$.

3) Beräkna $\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{1-\cos(a+2b)}{a^2+4b^2+4ab}$

Lösning: Obs: $a^2+4b^2+4ab = (a+2b)^2$

Använder att om $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

s.a. $\lim_{(a,b)\to(0,0)} g(a,b) = t$ och $\lim_{s\to t} h(s) = L$

så är $\lim_{(a,b)\to(0,0)} h(g(a,b)) = L$,

vilket följer enkelt från def. av gränsvärde.

Vi får då att

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{1-\cos(a+2b)}{a^2+4b^2+4ab} = \lim_{s\to 0} \frac{1-\cos(s)}{s^2} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Gränsvärde av typen} \\ 0/0. \text{ l'Hôpital's regel} \end{matrix} \right\} = \lim_{s\to 0} \frac{\sin(s)}{2s} = \frac{1}{2}$$

(standardgränsvärde)

Kunde också ha lösts med Taylorutveckling eller l'Hôpitals regel en gång till för sista steget.

Svar: 1/2.

---

4) Bestäm lokala max-, min- och sadelpunkter för funktionen

$$f(x,y) = x^2+5x-xy+\ln(x^2/y)$$

Lösning:

$$f = x^2+5x-xy+2\ln x-\ln y \qquad \begin{matrix} x\neq 0 \\ y>0 \end{matrix}$$

$$f_x = 2x+5-y+2/x$$

$$f_y = -x-1/y.$$

Stationära punkter:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+5-y+2/x = 0 \\ -x-1/y = 0 \end{cases}$$

$$\left(-x-1/y = 0 \iff x = -1/y \right)$$

$$\iff \begin{cases} -2/y+5-y-2y = 0 \\ x = -1/y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3y^2-5y+2 = 0 \\ x = -1/y \end{cases}$$

$$3y^2-5y+2=0 \iff y^2-\frac{5}{3}y+\frac{2}{3}=0$$

$$\iff y=\frac{5}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{25-24}{6^2}}=\frac{5}{6}\pm\frac{1}{6}.$$

$$y=6/6=1 \quad \text{el.} \quad y=4/6=2/3$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x=-1/y=-1 \qquad x=-1/y=-3/2$$

Stationära punkter:

$(-1,1)$ och $(-3/2,\ 2/3)$

$$f_{xx}=\frac{d}{dx}\left(2x+5-y+2/x\right)=2-2/x^2$$

$$f_{xy}=\frac{d}{dy}\left(2x+5-y+2/x\right)=-1$$

$$f_{yy}=\frac{d}{dy}\left(-x-1/y\right)=1/y^2$$

$$D=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}$$

$\underline{(x,y)=(-1,1)}$ $\quad D(-1,1)=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1<0$

andraderivatstestet $\Rightarrow$ $\underline{(-1,1)\ \text{sadelpunkt}}$

$\underline{(x,y)=(-3/2,\ 2/3)}$ $\quad D(-3/2,2/3)=\begin{vmatrix} 2-2\cdot\frac{4}{9} & -1 \\ -1 & \frac{9}{4}\end{vmatrix}=$

$$=2\left(\frac{9}{4}-1\right)-1=\frac{18-8-4}{4}=\frac{6}{4}>0$$

$$f_{xx}(3/2,-2/3)=2-2\cdot\frac{4}{9}=2\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)>0$$

andraderivatstestet $\Rightarrow$ $(-3/2,2/3)$ $\underline{\text{lok. min}}$

$\underline{\text{Svar:}}$ $(-1,1)$ sadelpunkt

$(-3/2,\ 2/3)$ lok. min.

5) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C 3x^2y\,dx + (x^3+4y^3)\,dy$$

där C är parabelbågen $y^2 = x$ från punkten $(1,-1)$ till punkten $(1,1)$.

Lösning: Kurvan parametriseras av y och går från $y=-1$ till $y=1$.

$$\int_C 3x^2y\,dx + (x^3+4y^3)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} 3\cdot(y^2)^2\,y\,dy^2 + ((y^2)^3 + 4y^3)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} 3y^5\cdot 2y\,dy + (y^6+4y^3)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} 7y^6 + 4y^3\,dy = \left[\, y^7 + y^4 \,\right]_{-1}^{1} = 1+1-(-1)-1 = 2$$

Svar: 2

---

6) Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$

där D är området $x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0$.

Lösning:

$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_D \frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$= \underbrace{\iint_D dx\,dy}_{\text{arean av } D} + \underbrace{\int_D \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy}_{\substack{=0 \text{ eftersom} \\ \text{integranden udda funktion av } x \\ \text{och området symmetriskt i } x.}} = \frac{\pi}{2} + 0$$

Integralen kan också ganska enkelt räknas ut med integration i polära koordinater.

Svar: $\pi/2$.

7) Beräkna arean av den del av ytan $z = xy$ vars projektion på xy-planet är följande område: $x^2 + y^2 \leq 3$, $y > 0$, $y > x\sqrt{3}$.

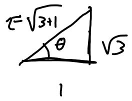
Lösning: Linjen $y = \sqrt{3}x$ i polära koordinater blir:

$$r\sin(\theta) = \sqrt{3}\, r\cos(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \sqrt{3}$$

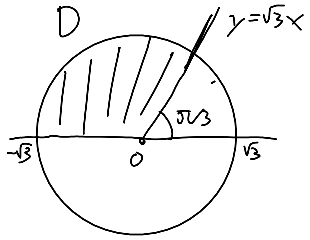
$y > 0$ & $y = \sqrt{3}x \Rightarrow x > 0$

Man får då fram θ ur följande triangel:



och $0 < \theta < \pi/2$, $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \theta = \pi/3$

Området D ovan i xy-planet blir då:



I polära koordinater: $D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \pi/3 \leq \theta \leq \pi\}$.

$$f(x,y) = xy \qquad f_x = y, \quad f_y = x.$$

Ytelement för $z = f(x,y)$:

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\,dy = \sqrt{1 + y^2 + x^2}\, dx\,dy.$$

Så arean är:

$$\iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\,dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{polära koordinater,} \\ dx\,dy = r\,d\theta\,dr \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\pi/3}^{\pi} \sqrt{1 + r^2}\, r\, d\theta\, dr = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + r^2}\, r\, dr$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} s = r^2 \\ ds = 2r\,dr \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ \Rightarrow 0 \leq s \leq 3 \end{array} \right\} = \frac{\pi}{3} \int_0^3 \sqrt{1 + s}\, ds = \frac{\pi}{3} \left[\frac{(1+s)^{3/2}}{3/2} \right]_0^3$$

$$= \frac{2\pi}{9}\left(4^{3/2} - 1\right) = \frac{2\pi}{9}\left(2^3 - 1\right) = \frac{14\pi}{9}$$

Svar: $14\pi/9$

8) Låt $\mathbb{F} = \left(x(x^2+y^2+z^2), y(x^2+y^2+z^2), z(x^2+y^2+z^2) \right)$ vara hastighetsvektorn i en vätskeströmning. Beräkna nettoflödet ut ur den totala begränsningsytan till cylindern

$$x^2+y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 3$$

Lösning:

$$\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{d}{dx}\left(x(x^2+y^2+z^2)\right) + \frac{d}{dy}\left(y(x^2+y^2+z^2)\right) + \frac{d}{dz}\left(z(x^2+y^2+z^2)\right)$$

$$= x^2+y^2+z^2+2x^2+ x^2+y^2+z^2+2y^2 + x^2+y^2+z^2+2z^2 =$$

$$= 5(x^2+y^2+z^2).$$

S begränsningsytan till cylindern C:

Divergenssatsen:

$$\text{Flödet } \mathbb{F} = \iint_S \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \iiint_C \operatorname{div} \mathbb{F} \, dV$$

I cylindriska koordinater:

$$C = \{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq z \leq 3 \}.$$

$$dV = r \, d\theta \, dr \, dz$$

$$\iiint_C \operatorname{div} \mathbb{F} \, dV = 5 \int_0^3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} (r^2+z^2) \, r \, d\theta \, dr \, dz =$$

$$= 10\pi \int_0^3 \int_0^2 r^3 + z^2 r \, dr \, dz = 10\pi \int_0^3 \left[\frac{r^4}{4} + \frac{z^2 r^2}{2} \right]_{r=0}^{2} dz =$$

$$= 10\pi \int_0^3 (4+2z^2) \, dz = 10\pi \left[4z + \frac{2z^3}{3} \right]_0^3 = 10\pi (12+18) = 300\pi.$$

Svar: 300π