Lösningar, Tenta 2016-10-24, LMA017

1) a) Bestäm lineariseringen till

$$f(x,y) = \arctan(x + 3\ln(y))$$

kring $(x,y) = (0,1)$.

b) Använd lineariseringen för att approximera $\arctan(0{,}01 + 3\ln(1{,}02))$.

---

a) $f'_x = \dfrac{1}{1+(x+3\ln y)^2}$ $\left(\dfrac{d}{dt}\arctan t = \dfrac{1}{1+t^2}\right)$ $f'_x(0,1) = 1$

$f'_y = \dfrac{1}{1+(x+3\ln y)^2} \cdot \dfrac{3}{y}$ $f'_y(0,1) = 3.$

$\left(\begin{array}{c}\text{inre derivata} \\ \frac{\partial}{\partial y}(x+3\ln y)\end{array}\right)$

Linearisering kring $(0,1)$:

$$L(x,y) = f(0,1) + f'_x(0,1)(x-1) + f'_y(0,1)(y-1)$$
$$= 0 + 1\cdot(x-0) + 3\cdot(y-1)$$

Svar: $L(x,y) = x + 3(y-1)$.

b) $\arctan(0.01 + 3\ln(1.02)) = f(0.01, 1.02) \approx L(0.01, 1.02) =$

$= 0{,}01 + 3\cdot 0{,}02 = 0{,}07.$

Svar: $\arctan(0{,}01 + 3\ln(1.02)) \approx 0.07$

2) a) Förklara varför gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$$ inte existerar.

b) Bevisa att $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

---

a) $$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$$

Kollar på gränsvärde längs olika linjer:

Närmar oss $(0,0)$ längs x-axeln:

$$\mathbb{r}_1(t) = (t,0), \quad \mathbb{r}_1(0) = (0,0).$$

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbb{r}_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cdot 0}{t^4+0} = 0.$$

Närmar oss $(0,0)$ längs linjen $y=x$:
En riktningsvektor för linjen är $(1,1)$, så linjen ges av:

$$\mathbb{r}_2(t) = (0,0)+t(1,1) = (t,t).$$

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbb{r}_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cdot t^2}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^4}}{2\cancel{t^4}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Olika gränsvärden när närmar oss $(0,0)$ längs de två olika linjerna. Om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar skulle vi få detta längs alla linjer genom $(0,0)$, så gränsvärdet existerar ej.

b) Har $$0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} + \underbrace{\frac{y^4}{x^2+y^2}}_{(\ge 0)} = \frac{y^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = y^2.$$

Om tar $f(x,y)=0$, $g(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ och $h(x,y)=y^2$ så får vi enligt ovan att $f(x,y) \le g(x,y) \le h(x,y)$ och

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) \quad \text{(polynom är kontinuerliga)}$$

så enligt instängningsregeln är

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

3) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan

$$5ze^z + 3x^2y = 3$$

i punkten $(1,1,0)$

$$F(x,y,z) = 5ze^z + 3x^2y$$

$F'_x = 6xy$ $\qquad F'_x(1,1,0) = 6$
$F'_y = 3x^2$ $\qquad F'_y(1,1,0) = 3$
$F'_z = 5e^z + 5ze^z$ $\qquad F'_z(1,0,1) = 5$

$$\nabla F(1,1,0) = (6,3,5)$$

Tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z) = 3$ genom $(1,1,0)$ har ekvation:

$$\nabla F(1,1,0) \cdot (x-1,\ y-1,\ z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 6(x-1) + 3(y-1) + 5(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 6x + 3y + 5z = 9$$

Svar: $\quad 6(x-1) + 3(y-1) + 5(z-0) = 0$

eller $\quad 6x + 3y + 5z = 9$

4) Bestäm globala maximum och minimum till funktionen

$$f(x,y) = x^2+y^2-y+\frac{1}{4}$$

på halvcirkelområdet $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.

Möjliga punkter för globala max/min:

(i) Kritiska punkter i D.
(ii) Kritiska punkter längs randkurvor
(iii) "Hörn" till randen.

<u>(i) Kritiska punkter i D:</u>

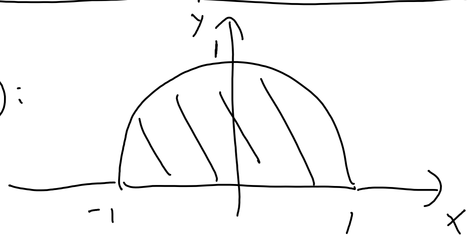
$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \iff x=0 \\ f'_y = 2y-1=0 \iff y = 1/2. \end{cases}$$

En kritisk punkt, $(0, 1/2) \in D$.

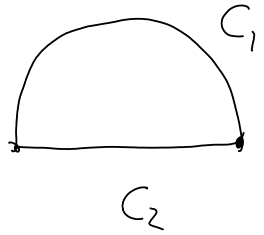
$$\boxed{f(0, 1/2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0}$$

<u>(ii) Kritiska punkter längs randkurvor:</u>

D:



Randen består av två kurvor:



På övre halvcirkeln C_1: $x^2+y^2=1$ och $y \geq 0 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$

$$C_1 = \{ (x, \sqrt{1-x^2}) \mid -1 \leq x \leq 1 \}.$$

$$g_1(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} =$$
$$= x^2 + 1 - x^2 - \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} = -\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{4}.$$

Kritiska punkter till g_1: $\quad g_1'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\boxed{g_1(0) = f(0,1) = \frac{1}{4}}$$

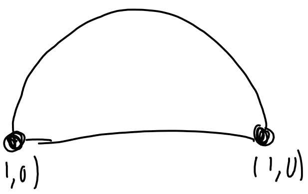
På linjen C_2: $\quad \{ (x,0) \mid -1 \leq x \leq 1 \}.$

$$g_2(x) = f(x,0) = x^2 + \frac{1}{4}$$

Kritiska punkter till g_2: $\quad g_2'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$

$$\boxed{g_2(0) = f(0,0) = \frac{1}{4}}.$$

(iii) "Hörn" till randen



$$\boxed{\begin{aligned} f(-1,0) &= (-1)^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}. \\ f(1,0) &= 1^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}}$$

Genom att jämföra funktionsvärdena i de möjliga punkterna, för max och min ovan, ser att f har
globalt max $5/4$ i $(-1,0)$ och $(1,0)$
och globalt min 0 i $(0,1/2)$.

5) Beräkna längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = \left((\sqrt{2})\, t, \frac{t^2}{2}, \ln t \right)$, där $1 \le t \le e$.

Längd av kurva C: $\int_C ds$.

C ges av $\mathbf{r}(t)$: $ds = |\mathbf{r}'(t)|\, dt$.

$\mathbf{r}'(t) = \left(\sqrt{2}, t, \frac{1}{t} \right)$. $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + t^2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{2 + t^2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} = t + \frac{1}{t}$

$(t > 0)$

$$\int_C ds = \int_1^e \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \left[t^2/2 + \ln|t| \right]_1^e = \frac{e^2}{2} + \underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

<u>Svar:</u> Längden är: $\frac{e^2+1}{2}$.

6) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x^2+y^2\,dA,$$

där $D=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt{x}\}$.

Beräknar som upprepad integral:

$$\iint_D x^2+y^2\,dA = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} x^2+y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \Big[\, x^2y + y^3/3 \,\Big]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^3}{3}dx = \int_0^1 x^{5/2} + \frac{x^{3/2}}{3}\,dx = \left[\frac{x^{7/2}}{7/2} + \frac{x^{5/2}}{(5/2)\cdot 3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{2}{15} = 2\cdot\left(\frac{15+7}{7\cdot 15}\right) = \frac{44}{105}$$

Svar: $\frac{2}{7}+\frac{2}{15} = \frac{44}{105}$.

7) Beräkna masscentrum för en tunn tråd längs kurvan

$$\mathbb{r}(t) = (\cos t, \sin t), \qquad 0 \le t \le \pi/2,$$

där tråden har konstant densitet $\rho(x,y) = 1$.

Masscentrum: $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right)$, där $M_x = \int_C x \cdot \rho(x,y)\, ds$

$$M_y = \int_C y \cdot \rho(x,y)\, ds$$

$$m = \int_C \rho(x,y)\, ds.$$

$\mathbb{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ $\qquad |\mathbb{r}'(t)| = \sqrt{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1 \text{ (trig. ettan)}}} = 1.$

$$m = \int_0^{\pi/2} 1\, dt = \pi/2.$$

$$M_x = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot 1\, dt = \left[\sin t\right]_0^{\pi/2} = 1.$$

$$M_y = \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot 1\, dt = \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = -(-1) = 1.$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m}\right) = \left(\frac{1}{\pi/2}, \frac{1}{\pi/2}\right) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right).$$

<u>Svar:</u> $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right).$

8) Avgör vilka av vektorfälten

$$\mathbb{F} = (3x^2y - 2x, x^3 + y) \quad \text{och} \quad \mathbb{G} = (3x^2y - 2y, x^3 + x)$$

som är konservativa. För de av vektorfälten som är konservativa, bestäm en potential.

Om $\mathbb{F} = (P, Q)$ ett vektorfält definierat på $\mathbb{R}^2$, så är $\mathbb{F}$ konservativt precis om $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\left.\begin{array}{ll} P = 3x^2y - 2x, & \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \\ Q = x^3 + y & \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{array}\right\} \text{lika} \Rightarrow \mathbb{F} \text{ konservativt.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} R = 3x^2y - 2y & \frac{\partial R}{\partial y} = 3x^2 - 2 \\ S = x^3 + x & \frac{\partial S}{\partial x} = 3x^2 + 1 \end{array}\right\} \text{olika} \Rightarrow \mathbb{G} \text{ inte konservativt.}$$

Potential till $\mathbb{F}$: Vill hitta f s.a. $f'_x = 3x^2y - 2x$, $f'_y = x^3 + y$.

En lösning till första ekvationen är: $f_0 = \int 3x^2y - 2x \, dx = x^3y - x^2$.

Allmänna lösningen är: $f(x,y) = f_0(x,y) + g(y) = x^3y - x^2 + g(y)$.

Sätter in det i andra ekvationen:

$$f'_y = (f_0)'_y + g'(y) = x^3 + g'(y) = Q = x^3 + y \Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \int y \, dy = y^2/2 + C.$$

$f = f_0 + g = x^3 y - x^2 + y^2/2 + C.$

Svar: $\mathbb{F}$ är konservativt, och
$f = x^3 y - x^2 + y^2/2 + C$ är en potential till $\mathbb{F}$.

$\mathbb{G}$ är inte konservativt.